ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

18. Band, Heft 8 29. August 1938 S. 337—384

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Chwistek, L., and W. Hetper: New foundation of formal metamathematics. J. Symbolic Logic 3, 1—36 (1938).

Die vorliegende Begründung der „Metamathematik" verfolgt das gleiche Ziel und ist auf denselben Grundsätzen aufgebaut wie die in dies. Zbl. 8, 289 referierte; sie weist jedoch gegenüber dieser, wie die Autoren hervorheben, einige wichtige Modifikationen auf, die u. a. eine weitgehende Einschränkung der benötigten „preliminary language" gestatten. Der eigentlichen Konstruktion sind Interpretationen vorausgeschickt und eine Diskussion angeschlossen. Die folgenden Anwendungen werden skizziert: 1. Arithmetik der ganzen und rationalen Zahlen, 2. elementarer Klassenkalkul, 3. „metamathematischer Kalkul"; der hierauf bezügliche Absatz birgt eine Einkleidung des Gödelschen Satzes, dessen Beweis in dem aufgebauten Formalismus angekündigt wird. *Arnold Schmidt* (Marburg, Lahn).

Wilkosz, Witold: Remarque sur la notion de la définition conditionnelle de Peano. Ann. Soc. Polon. math. 16, 176—178 (1938).

Bemerkung betreffs der Umwandlung einer bedingten Definition $(h \cdot \supset \cdot x \overset{\text{df}}{=} a)$ in eine bedingungsfreie. *Arnold Schmidt* (Marburg, Lahn).

Naidu, P. S.: On a significant property of postulate-sets. J. Annamalai Univ. 7, 67—76 (1938).

Die Arbeit beschäftigt sich mit den Beziehungen des Pragmatismus (hierunter versteht der Autor nothing but the generalised philosophical form of the theory underlying the practice of scientific method) zur axiomatischen (postulational) Methode. Insbesondere wird der Unterschied zwischen Axiomen und Postulaten sowie die enge Verwandtschaft von Axiomensystemen und induktiven Hypothesen herausgehoben. *Arnold Schmidt* (Marburg, Lahn).

Moisil, Gr. C.: Sur le syllogisme hypothétique dans la logique intuitioniste. J. Math. pures appl., IX. s. 17, 197—202 (1938).

Démonstration de deux règles de calcul, valables dans la logique intuitioniste. Remarques: L'axiome (12) est une conséquence des autres axiomes et des règles (A), (B). Les démonstrations peuvent être beaucoup simplifiées. *A. Heyting* (Laren).

Moisil, Gr. C.: Sur le mode problématique. C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 101—103 (1938).

The author introduces a three valued propositional logic which differs from the usual one in the scheme for implication. If t (true), p (possible), and f (false) are the three values, the table for implication gives: $t \supset t = f \supset t = f \supset p = f \supset f = t$; $p \supset p = p$; $p \supset f = t \supset f = t \supset p = f$. The author shows that a theory of syllogism can be developed on the basis of his system. *H. B. Curry* (State College, Pa.).

Frink jr., Orrin: New algebras of logic. Amer. Math. Monthly 45, 210—219 (1938).

Drei neuere aussagenlogische Systeme, nämlich die mehrwertige Logik von Łukasiewicz und Tarski [C. R. Soc. Sci. Varsovie III, 23, 1—21 (1930)], die intuitionistische Logik von Heyting [S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1930, 42—56) und die Logik der Quantenmechanik von Birkhoff und von v. Neumann (dies. Zbl. 15, 146) werden unter dem Gesichtspunkt verglichen, welche der in der klassischen Booleschen Algebra geltenden logischen Gesetze in den einzelnen Systemen ungültig sind. — Für die Łukasiewicz-Tarskische Logik wird ein System von Axiomen angegeben (Nr. 5), aus dem alle Gesetze, die für eine beliebige Anzahl von Wahrheitswerten gültig sind, folgen. *Gerhard Gentzen* (Göttingen).

Quine, W. V.: Completeness of the propositional calculus. J. Symbolic Logic **3**, 37—40 (1938).

The author establishes the completeness of the ordinary (2 valued) propositional algebra. This has, of course, been proved before in a variety of different ways (see e.g. the paper by Hermes and Scholz, this Zbl. **16**, 1). The present new proof starts with a formulation due to Tarski, Bernays, and Wajsberg, and follows a plan used by Wajsberg for another purpose (see this Zbl. **16**, 98). *H. B. Curry.*

Foster, Alfred L.: Natural systems. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **24**, 185—187 (1938).

Ein (mindestens 2 Elemente enthaltender) Bereich mit einer Verknüpfung, bezüglich deren er abgeschlossen ist, heißt natural system, wenn er auf einen Teilbereich der natürlichen Zahlen unter Interpretation der Verknüpfung als Multiplikation abbildbar ist; eine Anordnung der Elemente, die das auf die Multiplikation bezügliche Monotoniegesetz erfüllt, wird regulär genannt. Aus der Klasse der regulären Anordnungen eines genau 2 Primelemente α, β enthaltenden natural system werden gewisse Unterklassen (darunter die einelementigen mit $\alpha < \beta$) als „primitive" Unterklassen herausgehoben; diesen lassen sich als „charakteristische Zahlen" in konstruktiver Weise die reellen Zahlen > 1 umkehrbar eindeutig zuordnen, wobei den einelementigen Klassen die irrationalen Zahlen zukommen. *Arnold Schmidt* (Marburg, Lahn).

Church, Alonzo: The constructive second number class. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 224—232 (1938).

Two definitions of a constructive ordinal ξ are given. The first requires a system of notation which assigns a unique notation to every ordinal less than or equal to ξ and in which three specified problems are definite. The second extends the condition of λ-definability (Amer. J. Math. **58**, 349; this Zbl. **14**, 98) to transfinite ordinals. These definitions are shown to be equivalent. Further the last definition is extended to functions of ordinals whose values are ordinals. *A. Heyting* (Laren).

Schmidt, Arnold: Über deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen. Math. Ann. **115**, 485—506 (1938).

Will man den (engeren) Prädikatenkalkül zur formalen Darstellung der Deduktionen einer Theorie mit mehreren Sorten von Grundgegenständen — z. B. einer Geometrie mit Punkten, Geraden und Ebenen — anwenden, so gibt es zwei Wege: 1. Man verallgemeinert den Kalkül zu einem „mehrsortigen Prädikatenkalkül", wobei die zu „alle" und „es gibt" gehörigen Schlußweisen jeweils nur auf Gegenstände einer Sorte angewandt werden dürfen. — 2. Man bleibt beim „einsortigen Prädikatenkalkül" und unterscheidet die einzelnen Sorten durch bestimmte Prädikate, welche die Zugehörigkeit eines Gegenstandes zu einer Sorte bezeichnen. — Verf. beweist die Gleichwertigkeit beider Methoden, wobei er an einen Beweisansatz von Herbrand (Thèse Paris, Warschau 1930), der in dem wesentlichsten Punkte noch unzureichend war, anknüpft. — Beim Beweise wird zugleich eine Umdeutung der Aussagen der mehrsortigen Prädikatentheorie in gleichwertige Aussagen der „einsortigen" Theorie mit Sortenprädikaten angegeben (§ 3). *Gerhard Gentzen* (Göttingen).

Couffignal, Louis: Sur un problème d'analyse mécanique abstraite: la théorie de la réduction résulte de fonctions mécaniques. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1336—1338 (1938).

La fonction mécanique est une opération qui peut-être exécutée par des machines. — L'indice d'une proposition contenant des variables propositionnelles représente la distribution des valeurs logiques de cette proposition correspondant aux diverses combinaisons des valeurs logiques de ces variables. — Le calcul des propositions (théorie de la déduction de Whitehead et Russell) est mécanique dans ce sens que l'on peut inscrire sur des cartes successivement: des indices de toutes les propositions vraies — en ne se servant que des machines à statistique et des dispositifs électriques décrits par l'auteur dans sa Thèse; il est possible, en effet, de calculer de cette manière l'indice d'une implication, lorsque ce calcul a déjà été fait pour le premier et le second membre de cette implication; il est possible de ne faire retenir que des

cartes pour lesquelles le calcul fournit un indice nouveau, qui n'apparaissait pas auparavant, etc. (Rem.: Ce résultat, connu d'ailleurs en général, mais concrétisé ainsi par l'auteur, n'est valable que pour le problème suivant: „Est-ce qu'une proposition du calcul est vraie?" mais s'il s'agit du problème axiomatique suivant: „Une proposition peut-elle être déduite d'un système de propositions à l'aide des règles de raisonnement?", la réponse négative ne peut pas toujours être obtenue de façon aussi „mécanique". A. L.) *A. Lindenbaum* (Warszawa).

Geschichtliches.

Bortolotti, Ettore: Prodromi di metodo matematico nei problemi babilonesi. Scientia **63**, 305—312 (1938).

Auf Grund einer sehr vereinfachten schematischen Geschichtsbetrachtung kommt Verf. zu dem Schluß, die babylon. mathem. Texte repräsentierten nur eine Verfallsperiode (von 2000 jähriger Dauer!) und seien nur von einer vorangehenden sumerischen Periode entlehnt, die einfach postuliert wird — Texte haben wir nicht. Wenn er von einer „chaldäischen Kabbala" spricht, so wendet er eine vage Bezeichnung der römischen Kaiserzeit auf Kulturperioden an, die damit nichts zu tun haben. Die mathematische Astronomie der spätesten Periode wird überhaupt nicht beachtet.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Neugebauer, O.: Über griechische Mathematik und ihr Verhältnis zur vorgriechischen. (*Oslo, 14.—18. VII. 1936.*) C. R. congr. int. Math. **1**, 157—170 (1937).

Waerden, B. L. van der: Arithmetik und Rechentechnik der Ägypter. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig **89**, 171—172 (1937).

Vorbericht über eine in den Quellen u. Stud. Gesch. Math. demnächst erscheinenden Arbeit.

● **Enriques, F., e G. de Santillana: Compendio di storia del pensiero scientifico dall'antichità fino ai tempi moderni.** Bologna: Nicola Zanichelli 1937. VI, 481 pag. L. 20.—.

Die Darstellung ist im wesentlichen in derselben Art angelegt wie in dem großen Werk der gleichen Verfasser „Storia del pensiero scientifico" (1932), dessen erster Band das klassische Altertum umfaßt und dem die erste Hälfte des vorliegenden Auszuges entspricht. Obwohl die Schilderung der philosophischen Systeme den Leitfaden des Ganzen abgibt, kommt der Geschichte der exakten Wissenschaften doch ein sehr viel breiterer Anteil zu, als dies sonst in derartigen Werken der Fall ist. Auf verhältnismäßig sehr bescheidenem Raum ist es gelungen, eine große Fülle von Material sehr klar und anschaulich auszubreiten. Ref. findet es nur bedauerlich, daß bei der Schilderung der antiken Kultur die moderne Forschung über die 3000 jährige Vorgeschichte ignoriert worden ist (einige unbestimmte Bemerkungen über Ägypter und Babylonier, deren grundverschiedene Anteile an der antiken Kultur gar nicht unterschieden werden, kann man nicht mitrechnen). So figuriert noch immer Pythagoras als für die exakten Wissenschaften wichtige Person (trotz Vogt, E. Sachs, E. Frank u. a.), Diophant „sorge come genio aritmetico meraviglioso", und von der „ägyptisch-chaldäischen" Astronomie wird behauptet, sie sei stets „descrittiva e pratica, basata su formole empiriche: scienza da calendari" geblieben. Ersteres gilt zum Glück ebenso von Hipparch und Ptolemäus, letzteres ist unrichtig, wenn man nicht jede astronomische Zeitbestimmung (z. B. einer Finsternis) als „kalendarisch" bezeichnen will. Im übrigen läßt sich aber (wie schon Kugler vor 30 Jahren zeigte) der Aufbau der babylonischen Astronomie in engste Parallele zur griechischen setzen. *O. Neugebauer* (Kopenhagen).

Lundmark, Knut: On Greek cosmogony and astronomy. Meddel. Lunds astron. Observ., II. s. Nr **78**, 1—36 (1937).

Den Hauptteil der Arbeit bildet eine chronologisch geordnete Übersicht über die griechischen Autoren, die sich mit astron.-kosmogonischen Fragen beschäftigt haben, von Homer bis Stephanos. Dazu erläuternde Bemerkungen. *O. Neugebauer.*

Collinder, Per: Statistical notes on the astronomers of antiquity. Meddel. Lunds astron. Observ., II. s. Nr **82**, 1—13 (1937).

Im Anschluß an die vorst. ref. Arbeit wird an Hand von zwei Karten und einem Diagramm die Verteilung der Geburtsorte antiker Astronomen und ihre zeitliche Ver-

teilung dargestellt. Verf. hofft damit beizutragen „to elucidate some points in the great problem of classical astronomy, viz., the debt of Greek astronomy to the East". Ref. scheint es aber für die Bearbeitung dieses Problems unerläßlich zu sein, sich auch mit den umfangreichen Originalquellen orientalischer Astronomie zu beschäftigen, während Verf. hierfür nur aus Quellen dritter Hand schöpft (z. B. werden Kuglers Arbeiten nirgends berücksichtigt), so daß er z. B. mit Antoniadi an Äthiopien „as the possible birthplace of astronomy" denken kann. *O. Neugebauer* (Kopenhagen).

Hårs, Johann: Die Arithmetik von Debrecen. Das älteste ungarische mathematische Werk. Mitt. math. Semin. Univ. Debrecen H. **14,** 1—164 u. dtsch. Zusammenfassung 165—168 (1938) [Ungarisch].

Es handelt sich um ein Lehrbuch des Rechnens aus dem Jahre 1577. *Neugebauer.*

Saltykow, N.: „La géométrie" de Descartes. 300e anniversaire de géométrie analytique. Bull. Sci. math., II. s. **62,** 83—96 et 110—123 (1938).

Calleri, Piera: Sulle origini della nozione dei punti ellittici e iperbolici di una superficie. Period. Mat., IV. s. **18,** 33—42 (1938).

The first author who studied the relation between the signature of the radii of principal curvature at a point of a surface and the geometrical behavior of this surface at that point was Meusnier (Mém. div. Savants, Acad. Paris 1776, 1785). Further contributions are due to Monge and Dupin. The behavior of the tangent plane with respect to the surface at the point of tangency has been first correctly analyzed by Hachette (Traité de Géom. déscriptive, 1822) and Cauchy (Leçons sur les applications du Calcul inf. à la Géométrie, 1826). *Struik* (Cambridge, Mass.).

● **Cauchy, Augustin: Œuvres complètes. Tome 14, II. sér.** Paris: Gauthier-Villars 1938. 482 pag. Frcs. 200.—.

Jelitai, József: Briefe von Gauss und Encke im ungarischen Landesarchiv. Beitrag zur Geschichte der Astronomie in Ungarn. Mat. természett. Értes. **57,** Tl 1, 136—143 u. deutsch. Zusammenfassung 144 (1938) [Ungarisch].

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

Ritzdorff, Bruno: Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen mit halbfiniter Koeffizientenmatrix. Math. Z. **44,** 23—54 (1938).

Es gibt zwei Möglichkeiten, für vollkommene lineare Koordinatenräume λ (mit unendlich vielen Koordinaten) eine Theorie der quadratischen Formen anzusetzen: 1. Ist $\mathfrak{A}$ eine Matrix, die λ in einen Teil des dualen Raumes λ^* abbildet, so bildet die transponierte Matrix $\mathfrak{A}'$ ebenfalls λ in λ^* ab. Also kann die Symmetrie durch $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ $(a_{ik} = a_{ki})$ erklärt werden. Die quadratische Form $\mathfrak{x}'\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} x_i x_k$ ist für alle $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ aus λ erklärt und konvergent. Zwei quadratische Formen mit den symmetrischen Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, die beide λ in λ^* überführen, heißen nun äquivalent, wenn es eine λ in sich transformierende intakte Matrix $\mathfrak{P}$ gibt (d. h. eine Matrix mit einer eindeutigen Reziproken $\mathfrak{P}^{-1}$, die ebenfalls λ in sich überführt), so daß $\mathfrak{P}'\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$ wird. Dieser Ansatz geht auf den Ref. zurück. — 2. Mit $\lambda + \lambda^*$ wird der Raum aller $\mathfrak{x} = (\ldots, x_{-1}, x_0 | x_1, x_2, \ldots)$ bezeichnet, deren linke Hälfte eine Stelle aus λ, deren rechte Hälfte eine Stelle aus λ^* ist. Die $\lambda + \lambda^*$ in sich überführenden Matrizen $\mathfrak{A} = (a_{ik})$, $i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, zerfallen entsprechend in 4 Felder,

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}^* \\ {}_*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}_* \end{pmatrix}.$$

An Stelle der Symmetrie fordert man jetzt für $\mathfrak{A}$ Symmetrie an der Nebendiagonalen, d. h. $\mathfrak{A} = \tilde{\mathfrak{A}}$, mit $\tilde{a}_{ik} = a_{-i+1,\,-k+1}$. Bezeichnet $\tilde{\mathfrak{x}}$ die Stelle mit $\tilde{x}_i = x_{-i+1}$, so läßt

sich für jedes $\mathfrak{x}$ aus $\lambda + \lambda^*$ die quadratische Form $\tilde{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \sum_{i,k=-\infty}^{+\infty} a_{ik}\tilde{x}_i x_k$ bilden. Zwei solche quadratischen Formen $\tilde{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ und $\tilde{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}\mathfrak{x}$ heißen jetzt äquivalent, wenn es eine intakte, $\lambda + \lambda^*$ in sich überführende Matrix $\mathfrak{P}$ gibt, so daß $\tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$ wird. Dieser Weg stammt von O. Toeplitz. Beherrscht man diese Äquivalenztheorie für $\lambda + \lambda^*$, so beherrscht man damit auch die Äquivalenztheorie für λ, λ^* und $\lambda + \lambda^*$ im Sinne von 1. — Verf. führt nun die Äquivalenztheorie im Sinne von 2. für den halbfiniten Raum $\varphi + \varphi^* = \varphi + \omega$ durch. $\varphi + \omega$ besteht aus allen Stellen $(\ldots, x_{-1}, x_0 | x_1, x_2, \ldots)$, in deren linken Hälfte nur endlich viele Koordinaten von Null verschieden sind. Verf. zeigt, daß jede quadratische Form einer Form äquivalent ist, deren Matrix $\mathfrak{A}$ so aussieht: $\mathfrak{A}^*$ ist die Nullmatrix, ${}_*\mathfrak{A}$ ist eine Matrix, die in der Hauptdiagonalen 0, $+1$ und -1 stehen hat, sonst nur Nullen, $\mathfrak{A}_*$ ist eine Matrix, die in jeder Zeile oder Spalte höchstens eine $+1$ enthält, sonst nur Nullen enthält. Diese Normalform läßt sich noch weiter aufspalten, und es wird die volle Äquivalenzklasseneinteilung mit Hilfe geeigneter Invarianten aufgestellt. *G. Köthe* (Münster).

Calugareano, Georges: Invariants de prolongement et groupes de transformations linéaires. C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 207—209 (1938).

Les invariants de prolongement d'un polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, c'est-à-dire les fonctions des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ qui ne changent pas vis-à-vis des transformations $z = z' + h$, sont ici rattachés à la théorie de S. Lie des groupes de transformations linéaires à un paramètre, en interprétant $a_0, a_1, \ldots, a_n$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace projectif à n dimensions. L'A. obtient un invariant linéaire, a_n, $E\left(\frac{n}{2}\right)$ invariants quadratiques et $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$ invariants cubiques, dont il assigne (sans démonstration) l'expression en fonction des racines de l'équation $P(z) = 0$; il fait enfin quelques allusions sur le cas $n = \infty$, plus intéressant pour la théorie des fonctions analytiques. *Beniamino Segre* (Bologna).

Weitzenböck, R.: Über Trivektoren. VI. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 41, 362—369 (1938).

In dieser Arbeit werden die irreduziblen Syzygien dritter Art untersucht. Vgl. dies. Zbl. 18, 100 u. 242. *J. Haantjes* (Delft).

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Klein, Fritz: Ein weiterer Beitrag zum Problem der Zerlegung der Elemente gewisser harmonischer Verbände. Deutsche Math. 3, 46—64 (1938).

The author studies ultimately the existence and uniqueness of decompositions of elements of finite-dimensional modular lattices. He introduces two numerical functions: the maximum number $\psi(a)$ of "independent" components of an element a, and the number $\chi(a)$ of essentially different decompositions of a into (independent) constituents. He discusses independence in general and in modular lattices. It is difficult to give an idea of the results without going into previous researches of the author, Nakasawa, and von Neumann. They are mainly concerned with axiomatic questions and the equivalence of various definitions. *Garrett Birkhoff.*

Dilworth, R. P.: Abstract residuation over lattices. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 262—268 (1938).

In the theory of commutative rings, much use is made of the notion of the "residual" of two ideals — the set $A : B$ of all x such that $xB \leqq A$. A theory of residuation over abstract lattices (not merely lattices of ideals), is being developed by the author and Morgan Ward in a series of papers. In the present paper, the author proves the consistency and independence of a system of postulates for lattices, and for "residation" over lattices. He proves that with Boolean algebra, there is one and only one residuation, given by the formula $A : B = A + B'$. *Garrett Birkhoff.*

McCoy, Neal H.: Subrings of direct sums. Amer. J. Math. **60**, 374—382 (1938).

The author and Montgomery (see this Zbl. **17**, 244) have shown previously that any ring of prime characteristic p in which $a^p = a$ for all a, is isomorphic with a subring of a direct sum of prime fields $GF(p)$ — specializing in the case $p = 2$ to Stone's theorem that any Boolean algebra is isomorphic with a field of sets. The author now obtains more extensive results. Call a ring "algebraic" if and only if all its elements satisfy polynomial equations with integer coefficients. Algebraic rings R of characteristic p or 0 and without nilpotent elements are isomorphic with subrings of a direct sum of the (unique) least algebraically closed fields C_p of characteristic p; if $a^{p^n} = a$ identically, R is a subring of a direct sum of $GF(p^n)$. The extension loses something: In the original case, every element of every $GF(p)$ occurs as a component of some element of the subring; this is not true in the more general cases now treated.

Garrett Birkhoff (Cambridge, U. S. A.).

Albert, A. Adrian: Symmetric and alternate matrices in an arbitrary field. I. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 386—436 (1938).

Es ist bekannt, wie sich die klassische Theorie der Kongruenz symmetrischer und alternierender Matrizen $(P'AP)$, die damit zusammenhängende Theorie der quadratischen Formen, die Theorie der Äquivalenz von Paaren von Matrizen (PAQ, PBQ), speziell die Theorie der Ähnlichkeit $(P^{-1}AP)$ und der orthogonalen Äquivalenz $(P'AP, P' = P^{-1})$ sowie die entsprechenden Theorien für hermitesche Matrizen über allgemeinen Grundkörpern statt des Körpers der reellen oder komplexen Zahlen darstellen, vorausgesetzt daß man Grundkörper der Char. 2 ausschließt. Verf. gibt eine zusammenhängende Darstellung aller dieser Theorien unter Einschluß des Falles der Char. 2. Dabei muß man bekanntlich den Begriff der alternierenden Matrix so fassen, daß neben $A' = -A$ noch das Nullsein der Hauptdiagonalelemente gefordert wird, weil sonst für Char. 2 kein Unterschied zwischen symmetrischen und alternierenden Matrizen vorläge. Zu der Theorie der definiten reellen symmetrischen Matrizen ergibt sich eine vollständig analoge Theorie für Char. 2; definit wird durch Kongruenz zur Einsmatrix erklärt. Bei den quadratischen Formen treten naturgemäß für Char. 2 wesentliche Abweichungen gegenüber der klassischen Theorie auf. Verf. geht darauf im einzelnen ein und gibt die modifizierten Normalformen. Bei Char. 2 folgt aus der Ähnlichkeit zweier symmetrischer Matrizen nicht notwendig ihre orthogonale Äquivalenz nach algebraischem Abschließen. Verf. gibt eine Theorie der orthogonalen Äquivalenz bei Char. 2, bei der man übrigens nicht algebraisch abzuschließen braucht. Insbesondere gibt er eine vollständige Bestimmung der Elementarteiler einer symmetrischen Matrix bei Char. 2. Als letztes Ergebnis erhält er: In einem Körper der Char. 2 ist eine Matrix dann und nur dann einer symmetrischen Matrix ähnlich, wenn ihr Hauptpolynom nicht ein Produkt verschiedener inseparabler irreduzibler Polynome ist; falls der Grundkörper vollkommen ist, ist diese Bedingung trivialerweise stets erfüllt.

Hasse (Göttingen).

Zahl- und Funktionenkörper:

Nagell, Trygve: Bemerkung über die Klassenzahl reell-quadratischer Zahlkörper. Norske Vid. Selsk., Forh. **11**, 7—10 (1938).

Verf. gibt einen elementaren Beweis, daß die Klassenzahl des reell-quadratischen Körpers $P\left(\sqrt{16a^2+1}\right)$ mit a gegen ∞ strebt.

Hans Heilbronn (Cambridge).

Krasner, Marc: Le nombre des surcorps primitifs d'un degré donné et le nombre des surcorps métagaloisiens d'un degré donné d'un corps de nombres $\mathfrak{g}$-adiques. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 876—878 (1938).

L'auteur donne, en se rapportant à son travail sur la primitivité des corps $\mathfrak{p}$-adiques (voir ce Zbl. 18, 202), le nombre des extensions primitives, ayant un nombre de ramification et un degré donné, d'un corps de nombre $\mathfrak{p}$-adique. — Il appelle corps métagaloisien un corps $K = Q_s \supset Q_{s-1} \supset \cdots \supset Q_1 \supset Q_0 = k$ ou Q_i/Q_{i-1} est une exten-

sion galoisienne. Il donne en se rapportant à sa note (voir ce Zbl. 18, 102) une formule qui permet de calculer le nombre des extensions métagaloisiennes d'un degré donné d'un corps de nombres $\mathfrak{p}$-adiques. *Cahit* (Göttingen).

Moriya, Mikao: Klassenkörpertheorie im Großen für unendliche algebraische Zahlkörper. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I. Math. **6**, 63—101 (1937).

Ausführliche Darstellung der in einer vorläufigen Mitteilung (dies. Zbl. **16**, 344) skizzierten Resultate. *Taussky* (London).

Hasse, H.: Über die Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. (*Oslo, 14.—18. VII. 1936.*) C. R. congr. int. Math. **1**, 189—206 (1937).

The author reports on the recent developments in the theory of binary diophantine equations. Special stress is laid on the algebraic treatment of the problem. The author gives an account of his papers concerning the proof of the Riemann hypothesis for elliptic function fields over a finite Galois field (see this Zbl. **13**, 197). Finally, he briefly indicates how the problem related to curves of arbitrary genus might be treated. Essential will be a closer investigation of the ring of meromorphisms as defined by Severi and Deuring. *O. F. G. Schilling.*

Zahlentheorie:

Moessner, Alfred: Zahlentheoretische Untersuchungen und Resultate. Tôhoku Math. J. **44**, 401—405 (1938).

Erdös, P.: Über die Reihe $\sum \frac{1}{p}$. Mathematica, Zutphen B **7**, 1—2 (1938).

Two proofs are given that the series (extended over the primes) diverges.
Davenport (Manchester).

Ballantine, J. P., and O. E. Brown: Pythagorean sets of numbers. Amer. Math. Monthly **45**, 298—301 (1938).

Ist $(a_1, a_2, \ldots a_m; b_1, b_2, \ldots b_n)$ eine ganzzahlige, nichttriviale Lösung von $a_1^2 + \cdots + a_m^2 = b_1^2 + \cdots + b_n^2$, so ist auch $(s - a_1, \ldots s - a_k, a_{k+1}, \ldots a_m; s - b_1 \ldots s - b_h, b_{h+1}, \ldots b_n)$ eine, wenn $s = (a_1 + \cdots + a_k) - (b_1 + \cdots + b_h)$, $k - h = 2$. Bewiesen wird, daß die Transformation, welche die erste Lösung in die zweite überführt, selbstreziprok ist und daß $(s - b_1)^2 + \cdots + (s - b_h)^2 + b_{h+1}^2 + \cdots + b_n^2 < b_1^2 + \cdots + b_n^2$ ist, wenn $b_1 > a_1 \geqq a_n \cdots \geqq a_m \geqq 0$ ist. Es ergibt sich hieraus, daß durch diese (und triviale) Transformationen alle Lösungen gefunden werden können. *N. G. W. H. Beeger* (Amsterdam).

Châtelet, François: Points rationnels et classification des courbes de genre un. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1532—1533 (1938).

Mittels gruppentheoretischer Methoden führt Verf. die folgende Frage: „Gibt es eine birationale Transformation T mit rationalen Koeffizienten, die die Kurve γ vom Geschlecht 1 mit rationalen Koeffizienten überführt in C: $y^2 = x^3 - px - q$ mit rationalen p, q?" zurück auf die der Bestimmung der rationalen Punkte auf einer kubischen Kurve C_0, die aus γ mittels rationaler Operationen hergeleitet werden kann.
Mahler (Manchester).

Skolem, Th.: Zwei Sätze über kubische Kongruenzen. Norske Vid. Selsk., Forh. **10**, 89—92 (1937).

The author proves the following two theorems: 1. If a cubic congruence with respect to a prime modulus p has three roots, then its discriminant is a quadratic residue of p; if the discriminant of a cubic is a quadratic residue of p, the cubic congruence modulo p has three or no solutions. 2. If the discriminant of a cubic is a non-residue of p, then the cubic congruence has only one root modulo p. — This second theorem, which appears to be new, is easily proved in case $p = 6n - 1$. For $p = 6n + 1$, the proof depends on the theory of cubic residues in the fields $K(\sqrt{-3})$ and $K(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{d})$, where d is the discriminant of the cubic in question. *D. H. Lehmer.*

Erdös, P., and K. Mahler: On the number of integers which can be represented by a binary form. J. London Math. Soc. **13**, 134—139 (1938).

Sei $F(x, y)$ ein homogenes Polynom mit nur einfachen Linearfaktoren, vom Grade $n \geqq 3$, mit ganzrationalen Koeffizienten. $A(u)$ bezeichne die Anzahl der verschiedenen natürlichen Zahlen $k \leqq u$, für welche die Gleichung $F(x, y) = \pm k$ mindestens eine ganzrationale Lösung x, y besitzt. Verff. beweisen:

$$\varliminf_{u \to \infty} A(u)\, u^{-\frac{2}{n}} > 0.$$

Dies gilt auch, wenn x, y durch Nebenbedingungen der Form $x \geqq 0$, $\alpha x \leqq y \leqq \beta x$ mit konstanten α, β eingeschränkt sind, also z. B. für den Fall eines nichtnegativ-definiten $F(x, y)$ und die Anzahl $A(u)$ der natürlichen $k \leqq u$ mit $F(x, y) = k$. Der Beweis beruht auf der Mahlerschen Verallgemeinerung des Thue-Siegelschen Satzes auf p-adische Bewertungen. *Hasse* (Göttingen).

Hall, Newman A.: Binary quadratic discriminants with a single class of forms in each genus. Math. Z. 44, 85—90 (1938).

Damit die Anzahl der Klassen äquivalenter quadratischer Formen der Diskriminante $-\Delta < 0$ im Hauptgeschlecht gleich Eins ist, ist notwendig, daß Δ verschiedene elementare Kongruenzbedingungen erfüllt. Verf. gibt derartige Kongruenzen an.
Hans Heilbronn (Cambridge).

Oppenheim, A.: The arithmetical reduction of quadratic forms. J. London Math. Soc. **13**, 115—116 (1938).

Verf. erwidert auf die von Landherr gegen seinen Beweis für die Endlichkeit der Klassenanzahl quadratischer Formen erhobenen Einwendungen (s. dies. Zbl. **2**, 247 u. **17**, 247), daß diese auf einem Mißverständnis seiner früheren Darstellung beruhten und legt einige dort zu knapp erörterte Stellen ausführlicher dar. *Bessel-Hagen.*

Fuld, M. M.: On Waring's problem. Akad. Wetensch. Amsterd., Proc. **41**, 289—290 (1938).

Verf. kündigt zwei G-Sätze an, deren Beweise den Gegenstand seiner demnächst erscheinenden Dissertation bilden werden: Satz 1. Sind k, s, j ganzzahlig,

$$k > 3, \quad \frac{7}{5}\, 2^{k-1} \geqq s > 2k, \quad k-1 \leqq j < k^2, \quad \left(\frac{k-1}{k}\right)^j < \frac{s-2}{2^{k-1}(k-2)},$$

so gilt $G(k) \leqq s + 2j + 2$. — Damit bekommt man z. B. für $4 \leqq k \leqq 16$ die folgenden Schranken: 17, 29, 42, 59, 78, 101, 125, 153, 184, 217, 253, 292, 333.

Dieselben Werte ergeben sich aus einer von Estermann angekündigten (s. dies. Zbl. **14**, 10) und kürzlich in den Acta Arithm. **2** (dies. Zbl. **15**, 152) veröffentlichten Abschätzung. — Satz 2. Sind k, s, j, l ganzzahlig,

$$k > 3, \quad \tfrac{7}{5}\, 2^{k-1} \geqq s > 2k, \quad k-1 \leqq j < k^2, \quad l < k^2,$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2k-1}{k(2k+1)}\right)\left(\frac{k-1}{k}\right)^{l-2} + \left(\frac{k-1}{k}\right)^j < \frac{2k-1}{2k(k-2)(2k+1)} + \frac{(2k-1)(s-2)}{(2k+1)(k-2)\,2^{k-1}},$$

so gilt

$$G(k) \leqq s + 2j + l + 2. \tag{1}$$

Verf. gibt an, daß hieraus für $17 \leqq k \leqq 20$ die Schranken 369, 398, 427, 455 folgen und daß in (1) die Ungleichung

$$G(k) \leqq 6k \log k + k(2 + 3\log 3) + 8 \tag{2}$$

enthalten ist. (2) verschärft zwar einen Heilbronnschen Satz (s. dies. Zbl. **13**, 150), ist aber nicht so gut wie die kürzlich von Vinogradoff, Trav. Inst. Math. Stekloff **10**, 63, gegebene Ungleichung

$$G(k) < 6k \log k + k(2 + 3\log 3). \qquad (k > 8) \tag{3}$$

(3) wird seinerseits für hinreichend großes k von der Vinogradoffschen Abschätzung

$$G(k) < k(4\log k + 8\log\log k + 12) \qquad (k \geqq 800)$$

überboten, deren Beweis in Trav. Inst. Math. Tbilissi, Bd. 5, erscheinen wird. *Walfisz.*

Pipping, Nils: Die Goldbachsche Vermutung und der Goldbach-Vinogradowsche Satz. Acta Acad. Åboens. **11**, Nr 4, 1—25 (1938).

The author proves that every odd number between 9 and 360749 (inclusive) is the sum of three odd primes. Moreover the smallest of these primes may be chosen as 3, 5 or 7. To prove this result the author establishes the fact that every even number between 6 and 60000 is the sum of two odd primes. All even numbers are separated into two classes: Those even numbers $2h$ which differ from the largest primes less than $2h - 2$ by a prime are called "a-numbers". All other even numbers are called "b-numbers". By definition every a-number is the sum of two primes. It remains to consider b-numbers. It appears (below 60000 at least) that only about 20% of even numbers are b-numbers. There is given a 17 page table of the 5858 b-numbers between 5000 and 60000. Together with each b-number x is given the smallest prime m_x for which $x - m_x$ is a prime. The largest value of m_x is found to be 233. This occurs at $x = 54244$. *D. H. Lehmer* (Bethlehem, Pa.).

Corput, J. G. van der: Sur deux, trois ou quatre nombres premiers. (V. comm.) Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **41**, 344—349 (1938).

Fortsetzung von Verf. gleichnamigen Arbeiten (vgl. dies. Zbl. **17**, 390; **18**, 108, 244). *Hans Heilbronn* (Cambridge).

Corput, J. G. van der: Contribution à la théorie additive des nombres. II. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **41**, 350—361 (1938).

See this Zbl. **18**, 245; this report will be referred to as I. The third and last part of the proof of the general analytical proposition (Prop. 1) is given. As in the paper of Davenport and Heilbronn referred to in I (but not mentioned by the author) the difficulties presented by the singular series are overcome by a transition to a "singular product" (Prop. 2), though the treatment differs slightly in detail. The deduction of the arithmetical results quoted in I is begun. It is pointed out that, in some of these results, "almost all n" certainly cannot be replaced by "all sufficiently large n"; thus n cannot be expressed as $p + x^2$ if $n = a^2$ where $2a - 1$ is composite, and this gives an infinity of exceptional n. — Results corresponding to (4) and part of (2) (see I) have been obtained independently by Hua (Quart. J. Math. **9**, 68—80; this Zbl. **18**, 294), but the statements do not agree completely; the discrepancies will no doubt be cleared up when the full proofs are available. *Ingham.*

Walfisz, Arnold: Zur additiven Zahlentheorie. III. Trav. Inst. Math. Tbilissi **3**, 69—89 u. dtsch. Text 91—111 (1938) [Russisch].

The author proves that, associated with every residue class (mod 120), there is a number s such that almost all positive members of the class are the sums of s squares of primes and almost all members are not the sum of less than s squares of primes. The author evaluates s for each residue class; thus $3 \leqq s \leqq 8$ for all residue classes and, for example, $s = 3$ for the classes represented by 3, 27, 51, 99. *Wright.*

Walfisz, Arnold: Zur additiven Zahlentheorie. IV. Trav. Inst. Math. Tbilissi **3**, 121—189 (1938).

In paper II of this series (see this Zbl. **13**, 104) the author used Siegel's theorem that $\log L_d(1) = o(\log |d|)$ as $d \to \infty$ to find an approximation to $\pi(x; k, l)$, the number of primes less than or equal to x belonging to the arithmetic progression $kn + l$. Here the author proves a modified form of his result without the use of Siegel's theorem and deduces various results in the additive theory of primes. These are either the same as or very little weaker than the results obtained with the use of Siegel's theorem. For example, it is proved that almost all even numbers are the sum of two primes, a result hitherto proved only by means of Siegel's theorem. *Wright* (Aberdeen).

Sprague, R.: Bemerkungen über gewisse Zahlfolgen. Math. Z. **44**, 20—22 (1938).

Sei $[u]$ für reelles u die größte ganze Zahl $\leqq u$. Gibt es Paare irrationaler $\alpha > 0$ und $\beta > 0$, so daß die Folge der Zahlen $[n\alpha]$ die Folge der $[n\beta]$ als Teilfolge enthält $(n = 1, 2, \ldots)$? Verf. zeigt, daß es zu keinem irrationalen $\alpha > 2$ ein solches β gibt,

abgesehen vom trivialen Fall $\beta = m\alpha$ (m ganz rational), daß aber für jedes irrationale α mit $1 < \alpha < 2$ jedes $\beta = \frac{\alpha}{l+1-l\alpha}$ mit ganzem positivem $l < \frac{1}{\alpha-1}$ der Forderung genügt. Die Beweise sind elementar. Beim Beweis der zweiten Behauptung benutzt Verf. den Hilfssatz, daß für jedes irrationale $\alpha > 1$ die Folgen $[n\alpha]$ und $\left[n\frac{\alpha}{\alpha-1}\right]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ zusammen genau die Menge aller natürlichen Zahlen bilden und gibt noch eine Verallgemeinerung dieses Hilfssatzes. — Ref. bemerkt, daß sich dieser Hilfssatz (mit seiner Umkehrung) schon bei Uspenskij findet [Amer. Math. Monthly **34**, 516—521 (1917)]. *J. F. Koksma* (Amsterdam).

Mahler, Kurt: Ein P-adisches Analogon zu einem Satz von Tchebycheff. Mathematica, Zutphen B **7**, 2—6 (1938).

Als P-adisches Analogon des Tchebychef-Hermiteschen Satzes, daß für jedes Paar reeller ϑ und θ die Ungleichungen

$$|x - \vartheta y - \theta| < \frac{1}{2t}, \qquad |y| \leqq t$$

sich für unendlich viele, beliebig große $t \geqq 1$ in ganzen rationalen x, y lösen lassen (vgl. Hermite, Oeuvres III, 513), zeigt Verf. für jede beliebige Primzahl $P \geqq 2$: Seien ϑ und θ zwei ganze P-adische Zahlen, von denen die erste irrational ist. Dann gibt es eine positive Zahl μ, die nur von P und nicht von ϑ und θ abhängt derart, daß das Ungleichungssystem

$$|x - \vartheta y - \theta|_P \leqq \frac{\mu}{t^2}, \qquad \mathrm{Max}(|x|, |y|) \leqq t$$

für gewisse beliebig große Werte von $t \geqq 1$ in ganzen rationalen x und y lösbar ist. — Beim Beweise wird eine Mordellsche Methode benutzt, mit der man aus der Unlösbarkeit homogener auf die Lösbarkeit der zugehörigen inhomogenen Ungleichungssysteme schließen kann (dies. Zbl. **16**, 392). Druckfehler: In der ersten Formel der Arbeit (S. 2) lese man $|y|$ statt $|x|$. *J. F. Koksma* (Amsterdam).

Denjoy, Arnaud: Sur une fonction réelle de Minkowski. J. Math. pures appl., IX. s. **17**, 105—151 (1938).

Sei α eine Konstante mit $0 < \alpha < 1$. Dann kann eine Funktion $\varkappa(x, \alpha)$ der reellen Variablen x definiert werden mittels der folgenden Eigenschaften: 1. $\varkappa(x, \alpha)$ ist stetig in x. 2. $\varkappa(0, \alpha) = 1$, $\varkappa(+\infty, \alpha) = 0$. 3. Sind $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ zwei gekürzte Brüche mit $pq' - p'q = 1$, so ist

$$\varkappa\left(\frac{p+p'}{q+q'}, \alpha\right) = \alpha\varkappa\left(\frac{p'}{q'}, \alpha\right) + (1-\alpha)\varkappa\left(\frac{p}{q}, \alpha\right). \tag{1}$$

Dabei darf auch $\frac{p}{q}$ oder $\frac{p'}{q'}$ gleich $\frac{1}{0} = +\infty$, nicht aber gleich $\frac{-1}{0}$ sein. Also insbesondere $\varkappa(n, \alpha) = \alpha^n$ für ganzes n. — Für willkürliches x kann der Wert y von $\varkappa(x, \alpha)$ folgendermaßen gefunden werden: Man schreibe x als regelmäßigen Kettenbruch $x = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \cdots$ (alle a_i ganz, $a_i \geqq 1$ für $i \geqq 1$) und setze dann $\sigma_n = a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m}\left(2m = 2\left[\frac{n}{2}\right]\right)$, $\sigma'_n = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2m+1}\left(2m+1 = 2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1\right)$, $\sigma_0 = a_0$, $\sigma'_0 = 0$. Alsdann ist

$$y = \varkappa(x, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha^{\sigma_n} (1-\alpha)^{\sigma'_n}. \tag{2}$$

Umgekehrt ergibt sich x eindeutig als Funktion von y durch seinen Kettenbruch, indem man y in eine Reihe (2) entwickelt; dies ist immer auf genau eine Art möglich. — Die Funktion $\varkappa(x, \alpha)$ hat folgende bemerkenswerte Eigenschaft: Sind p, p', q, q' ganze Zahlen mit $pq' - p'q = (-1)^\delta$, $\delta = 0$ oder 1, $q \geqq 0$ und insbesondere $q' = +1$ für $q = 0$, so ist:

$$\varkappa\left(\frac{px+p'}{qx+q'}, \alpha\right) = \begin{cases} A\varkappa(x, \alpha) + B & \text{für } \delta = 0, \\ C\varkappa(x, 1-\alpha) + D & \text{für } \delta = 1, \end{cases} \tag{3}$$

wobei A, B, C, D streckenweise konstante Funktionen von x sind. Z. B.:

$$\varkappa(x+1, \alpha) = \alpha\varkappa(x, \alpha) \quad \text{für alle} \quad x$$

(diese Transformation und ihre Potenzen sind die einzigen, für die A, B bzw. C, D nicht unendlich viele Sprungstellen haben) und

$$\varkappa(-x, \alpha) = -\alpha^{-k-2}(1-\alpha)^{-k-1}\varkappa(x, 1-\alpha) + (1-\alpha+\alpha^2)\,\alpha^{-k-2}$$
$$\text{für} \quad k \leqq x \leqq k+1 \qquad (k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$$

Um die Formeln (3) für eine gegebene Transformation zu bestimmen, genügt es, die Sprungstellen der Koeffizienten A, B bzw. C, D zu kennen, da sich in jedem Konstanzintervall diese Koeffizienten durch Einsetzen irgend zweier Werte für x ergeben. Verf. zeigt, daß diese Sprungstellen gerade gleich den sämtlichen Näherungsbrüchen einer verallgemeinerten Art von zweiseitig unendlichen Kettenbrüchen für die rationale Zahl $-q'/q$ sind; diese „kanonischen" Kettenbrüche sind auch an sich von Interesse und werden eingehend untersucht. — In der Einleitung erwähnt Verf., daß seine Untersuchungen in Zusammenhang mit der Theorie der automorphen Funktionen gebracht werden können. *Mahler* (Manchester).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Liapounoff, A.: Sur l'uniformisation des complémentaires analytiques. Rec. math. Moscou **3**, 219—222 u. franz. Zusammenfassung 223 (1938) [Russisch].

Bekanntlich ist nach S. Mazurkiewicz jede A-Menge Projektion einer uniformisierten (d. h. auf jeder Vertikalen höchstens einen Punkt besitzenden) CA-Menge. In Beantwortung eines von P. Novikoff in Zusammenhang mit seinem Auswahlverfahren (vgl. dies. Zbl. 12, 344) dem Verf. gestellten Problem wird nun auch für die zweite projektive Klasse bewiesen, daß jede PCA-Menge Projektion einer uniformisierten $CPCA$-Menge ist. *B. Knaster* (Warszawa).

Tarski, Alfred: Über unerreichbare Kardinalzahlen. Fundam. Math. **30**, 68—89 (1938).

Der Verf. unterscheidet zunächst zwei Arten von unerreichbaren Kardinalzahlen (KZen.). Eine KZ. $\mathfrak{m} \neq 0$ heißt im weiteren Sinne unerreichbar (wSu.), wenn erstens m nicht als eine Summe von weniger als m KZen. $\mathfrak{n}_x$ mit $\mathfrak{n}_x < \mathfrak{m}$ darstellbar ist und es zweitens zu jedem $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ ein $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{n} < \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$ gibt; $\mathfrak{m}$ heißt im engeren Sinne unerreichbar (eSu.), wenn $\mathfrak{m}$ der ersten dieser Bedingungen genügt und auch für $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$ immer $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}$ gilt. Es werden dann verschiedene mit der Unerreichbarkeit einer KZ. verwandte Bedingungen aufgestellt und auf ihre Beziehungen zueinander untersucht. Dabei wird das Auswahlprinzip sowie die anderen Axiome der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre zugrunde gelegt, aber nicht die Cantorsche Alephhypothese ($2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$). Beispiele der Sätze sind die folgenden: Eine KZ. $\mathfrak{m} \neq 0$ ist dann und nur dann wSu., wenn $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$, wo $\alpha = 0$ oder ω_α eine reguläre Anfangszahl mit Limeszahlindex ist; $\mathfrak{m} \neq 0$ ist dann und nur dann eSu., wenn $\mathfrak{m}$ nicht als Produkt von weniger als $\mathfrak{m}$ Faktoren $< \mathfrak{m}$ darstellbar ist; eine eSu. KZ. $\neq 2$ ist wSu. und, wenn die Alephhypothese gilt, auch umgekehrt; jede KZ. $\mathfrak{m} \neq 0$ derart, daß für jede KZ. $\mathfrak{p}$ mit $0 < \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$ die Ungleichung $2^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}$ und auch die Gleichung $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$ gelten, ist eSu. (der umgekehrte Satz ist der Alephhypothese äquivalent). Im zweiten Teil der Arbeit stellt Verf. ein mengentheoretisches Axiom auf, das zu jeder Menge N die Existenz einer Menge M mit den folgenden Eigenschaften fordert: 1. $N \in M$; 2. ist $X \in M$ und $Y \subset X$, so ist $Y \in M$; 3. ist $X \in M$, so ist $\mathfrak{U}X \in M$ ($\mathfrak{U}X$ ist die Potenzmenge von X); 4. ist $X \subset M$ und $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{M}}$, so ist $X \in M$. Wenn man dieses Axiom zum Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystem hinzufügt, so können einige Axiome, einschließlich der Axiome des Unendlichen und der Auswahl, fortgelassen werden, und im so erweiterten System wird die Existenz von unerreichbaren KZen. beweisbar. Zum Schluß behauptet Verf. ohne Beweis, daß die von Gödel

angegebenen, innerhalb des Zermelo-Fraenkelschen Systems unentscheidbaren Sätze entscheidbar werden, falls man das neue Axiom einschaltet. *H. B. Curry.*

Piccard, Sophie: Sur un problème de la théorie des relations. Mathematica, Cluj **13**, 55—58 (1937).

The paper relates to the following problem of Sierpiński: P. If E is a non-denumerable set, and R a binary relation for the elements of E such that for every fixed element x of E there are at most a finite number of elements of E satisfying $x\,R\,y$, does there always exist a subset E_1 of E of the same cardinal as E such that for no pair of distinct elements x and y of E_1 is $x\,R\,y$ valid? Sierpiński proved (Compositio math. **3**, 304) that the answer is affirmative if $\overline{\overline{E}} = 2^a$, where a is any infinite cardinal, or if $\overline{\overline{E}} = \aleph_{\alpha+1}$, where α is any ordinal (finite or transfinite). The purpose of the present note is to prove these results of Sierpiński by an entirely different argument, in the course of which the following lemma and theorem are proved. Lemma. If m is a cardinal $> \aleph_0$ which is not the sum of less than m cardinals each less than m, and R a binary relation for the elements of a set E of cardinal m such that for every fixed element x of E there are at most a finite number of elements of E satisfying $x R y$, then there exists a subset H of E of cardinal m such that for every element y of H the set of elements x of H for which $x\,Ry$ is of cardinal $< m$. Theorem. The answer to P is affirmative for every set E of cardinal m, if $m > \aleph_0$ and not the sum of less than m cardinals each less than m. The results of Sierpiński are immediate consequences of this theorem. *Blumberg* (Columbus).

Sierpiński, W.: Sur une propriété additive d'ensembles. C. R. Soc. Sci. Varsovie **30**, 257—259 (1937).

λ bezeichnet nach Kuratowski (Topologie I, Monogr. Matem., S. 269, Warszawa 1933) die Eigenschaft einer Punktmenge M, daß die höchstens abzählbaren Teilmengen von M lauter G_δ-Mengen (in bezug auf M) sind. Ungelöst bleibt die Frage nach der abzählbaren Additivität der Eigenschaft λ. Verf. zeigt nun, daß hierfür bereits die endliche Additivität ausreicht, und zwar durch Einführung einer (vermutlich stärkeren) Hilfseigenschaft λ' in bezug auf den euklidischen n-dimensionalen, M enthaltenden Raum R^n, die darin besteht, daß für jede abzählbare, in R^n liegende Punktmenge A die Vereinigungsmenge $M + A$ die Eigenschaft λ aufweist (gleichwertig damit ist die Existenz in R^n einer G_δ-Menge G derart, daß $MG \subset A \subset G$). Es wird bewiesen, daß die Eigenschaft λ' erblich ist (d. h. wenn für M, so auch für sämtliche Teilmengen von M besteht), ferner daß wenn sie in bezug auf R^n, so auch in bezug auf R^{n+1} gilt, und schließlich daß sie abzählbar additiv ist, woraus sich die Implikation zwischen endlicher und abzählbarer Additivität von λ ergibt. Außerdem bemerkt Verf., daß unter Zugrundelegung der Kontinuumhypothese jede Teilmenge von R^1 eineindeutiges und stetiges Bild einer Menge von der Eigenschaft λ' in bezug auf R^2 ist. Unbekannt bleibt dagegen, ob λ' eine Homöomorphieinvariante ist (was für λ zutrifft). *Knaster.*

Sierpiński, Wacław: Sur l'équivalence des problèmes de M. Kolmogoroff et M. Mazurkiewicz. Fundam. Math. **30**, 65—67 (1938).

Proof of the equivalence of the following two problems M) and K), which are respective, special cases of unsolved problems of Mazurkiewicz and Kolmogoroff: M) Does a set of real numbers exist on which there exists a Baire function of class 3 but none of class 4. K) Does there exist a denumerable system Φ of sets, containing the sum and difference of every pair of its elements, such that $\Phi_{\sigma\delta\sigma} \neq \Phi_{\sigma\delta\sigma\delta} = \Phi_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma}$? *Blumberg* (Columbus).

Sierpiński, Wacław: Sur une fonction semi-continue. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. **24**, 211—213 (1938).

Proof, without resort to the continuum hypothesis, of the existence of on upper-semi-continuous, real function $f(x)$ such that no decomposition of the continuum into $\aleph_0$ sets is possible on each of which f is continuous. On the basis of the continuum

hypothesis, this result, according to a remark of Braun, is readily obtainable from a former result of the author. For the definition of f, a construction of N. Lusin is utilized. *Blumberg* (Columbus).

Malchair, Henri: Sur les superpositions de fonctions. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, IV. s. **2,** 139—157 (1937).

Die Arbeit bringt eine Reihe von Ergänzungen zu der Arbeit vom Ref. und V. Knichal (dies. Zbl. **13,** 152) über die Superposition nichtabnehmender Funktionen. Z. B.: Es sei B die Menge aller für $0 \leqq x \leqq 1$ stetigen und wachsenden Funktionen $f(x)$ mit $0 \leqq f(x) \leqq 1$. Die Frage, ob sich alle Funktionen einer beliebig vorgegebenen unendlichen Folge $f_1(x), f_2(x), \ldots$ aus B durch Superpositionen von endlich vielen Funktionen aus B darstellen lassen, ist noch offen. Verf. zeigt, daß die Antwort bejahend ist, wenn entweder $\frac{1}{4} < f_n(x) < M (M < 1)$ oder $f_n(0) > f_{n+1}(1)$ ist. *Jarník.*

Torrance, E. M.: Superposition of functions on monotonic functions. Fundam. Math. **30,** 90—91 (1938).

If $g(x)$ is monotone, and $f(x)$ has the Baire property in the restricted sense, $f[g(x)]$ has the Baire property in the restricted sense. *Blumberg* (Columbus).

Kunugi, Kinjiro: Sur les fonctions jouissant de la propriété de Baire. Jap. J. Math. **13,** 431—433 (1937).

A metric space X will be said to have property (α) if for every family of sets E_ξ of X, where ξ ranges over all ordinals less than a given ordinal γ, such that E_ξ is of first category, no pair of E_ξ's have common points, and $\sum E_\xi$ is of second category, it is possible to separate this sum into 2 parts $\sum_{\xi'} E_{\xi'}$, $\sum_{\xi''} E_{\xi''}$ without common points such that both these parts are everywhere of second category in one and the some open set of X. With reference to property α), the following theorem is proved: If X is a metric space having property α), and $y = f(x)$ a function having the property of Baire defined on a set A of X such that the values of $f(x)$ belong to an arbitrarily given metric space, then $f(x)$ is continuous if sets of the first category are negligible. Additionally, the theorem is proved: If X is a metric space, and Y a metric space which is dense-in-itself, then the image of $y = f(x)$ is of first category in $X \times Y$ if $f(x)$ is continuous when sets of the first category are negligible; by image of $f(x)$ is here understood the set of points (x, y) in $X \times Y$ satisfying $y = f(x)$. *Blumberg.*

MacNeille, H. M.: Extensions of measure. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **24,** 188—193 (1938).

There are three standard ways of defining real numbers from the rationals: by cuts (Dedekind), by Cauchy sequences (Cantor-Meray), and by sequences of nested intervals. Now suppose the ring of rational numbers is replaced by the class of so-called elementary figures (finite sums of rectangles) in Cartesian n-space, boundaries being ignored — these form a "Boolean" ring in the sense of Stone. Suppose also we regard the area of an elementary figure as the analogue of absolute value. Then completion by Cauchy sequences gives abstractly the algebra of Borel sets modulo sets of measure zero, and Lebesgue measure; completion by nested sequences gives the algebra of Jordan measurable sets modulo sets of measure zero, and so-called content. MacNeille's construction is theoretically interesting, but it does not give as a corollary the correspondence between the ideal elements adjoined in the process of completion, and sets in n-space. *Garrett Birkhoff* (Cambridge, U. S. A.).

Jessen, Børge: Abstrakte Maß- und Integraltheorie. III. Mat. Tidsskr. B **1938,** 13—26 [Dänisch].

Fortsetzung der didaktischen Einführung in die Lebesguesche Theorie für abstrakte Mengen (vgl. dies. Zbl. **10,** 200 u. **12,** 252). Die vorliegende Mitteilung enthält die Aufspaltung additiver Mengenfunktionen in positive Bestandteile bzw. in den kontinuierlichen und den singulären Teil; den Begriff des unbestimmten Integrals sowie die Differentiation der Mengenfunktionen. *W. Feller* (Stockholm).

Leja, F.: Généralisation de certaines fonctions d'ensemble. Ann. Soc. Polon. math. **16**, 41—52 (1938).

L'auteur généralise certains théorèmes d'existence de limites ayant conduit aux notions de diamètre transfini (Feketa-Pólya-Szegö) ou d'écart transfini (Leja). Considérant dans un espace métrique quelconque, deux points p, q, au lieu de partir de $\log 1/\overline{pq}$ ou de $1/\overline{pq}$, il part plus généralement de $\sigma(p, q)$, fct. symétrique ayant une limite (finie ou $+\infty$) quand p et q tendent vers un même point. Soit alors un ensemble E infini compact, et $(n+1)$ points p_i sur E. Il considère les expressions:

$$\frac{2}{n(n+1)} \underset{(p_i \text{ dans } E)}{\text{borne inf}} \sum_{\substack{j,k \\ (j \neq k)}} \sigma(p_j, p_k) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \underset{(p_i \text{ dans } E)}{\text{borne inf}} \left[\max_{(j)} \sum_{\substack{k \\ (k \neq j)}} \sigma(p_j, p_k) \right].$$

L'auteur démontre qu'elles ont pour $n \to \infty$, une même limite (finie ou $+\infty$). A un autre procédé fournissant le diamètre transfini, l'auteur fait correspondre une généralisation analogue, mais la limite encore existante n'est plus égale aux précédentes en général (mais $\geqq$). *Brelot* (Bordeaux).

Analysis.

Uhler, Horace S.: Log π and other basic constants. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **24**, 23—30 (1938).

The chief purpose of this paper is to give the value of $\log \pi$ to a great many decimal places for use in the Stirling series for $\log n!$ The work was based on Ramanujan's expression

$$\pi = (355/113)(1 - {,}0003/3533)(1 - \varepsilon),$$

where ε is approximately $3{,}47 \cdot 10^{-16}$. In carrying out the work several other basic constants were found with varying degrees of exactness. In fact the following numbers are given, the numbers in the [ ]'s indicating the number of decimal places in each case. $\log_{10} \sqrt{2\pi}$ [214], $\log_e \pi$ [213], $\log_{10} \pi$ [214], $\log_{10} 2$ [230], $\log_{10} 3$ [230], $\log_{10} 5$ [230], $\log_{10} 7$ [230], $\log_e 17$ [274], $\log_{10} 17$ [230], $\log_e 71$ [213], $\log_{10} 71$ [110], $\log_e 113$ [213], $\log_{10} 113$ [110], $1/\pi$ [253] π^2 [261]. *D. H. Lehmer* (Bethlehem, Pa.).

Tambs Lyche, R.: Sur les fonctions d'une variable réelle. Norske Vid. Selsk., Forh. **11**, 4—6 (1938).

Für $(m, n) = 1$, $n > 0$ sei $\varphi(m/n) = n^{-n}$; sonst sei $\varphi(x) = 0$; dann ist $\varphi(x)$ stetig für jedes irrationale x, unstetig für jedes rationale x und besitzt für jedes irrationale algebraische x die Ableitung Null. *Jarník* (Praha).

Lyn, G. van der: Une condition de continuité exprimée au moyen des différences finies d'ordre quelconque. Mathesis **52**, 125—128 (1938).

Shukla, U. K.: Differentiation of a definite integral with respect to a parameter in certain cases when Leibniz's rule is not applicable. Proc. Nat. Acad. Sci. India **7**, 123—130 (1937).

Die Differentiationsregel $\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b D_y(f(x, y))\,dx$, wo D_y irgendeine der 4 Ableitungen nach y ist, wird diskutiert und an einigen Beispielen, wo die übliche Leibnizsche Regel versagt, angewandt [vgl. Shukla, Proc. Nat. Acad. Sci. India **6**, 333—342 (1936)]. *Rogosinski* (Cambridge).

Shukla, Uma Kant: The necessary and sufficient condition for the validity of Leibniz's rule for differentiation under the sign of integration. Proc. Nat. Acad. Sci. India **6**, 333—342 (1936).

Vgl. vorst. Ref.

Fox, C.: The solution of a moment problem. J. London Math. Soc. **13**, 12—14 (1938).

The author gives an explicit solution of the moment problem

$$\int_0^1 f(t)\, t^r\, dt = c_r, \qquad r = 0, 1, \ldots n.$$

Apparently he has not noticed that his solution is contained as a special case in that by Hausdorff [Math. Z. 16, 230—231 (1923)], although a reference is made to this paper. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Mayr, Karl: Über die Lösung von Umkehrproblemen durch Differentialresolventen. Math. Z. 44, 91—103 (1938).

In ähnlicher Weise, wie er früher (dies. Zbl. 16, 357) die Entwicklung der Lösung einer algebraischen Gleichung $\lambda + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n$ nach Potenzen der Gleichungskoeffizienten auf die Lösung eines Systems von $(n - 1)$ Differentialgleichungen zurückführte, greift der Verf. das Problem der Untersuchung von Potenzreihen an. Sei $z(x)$ eine Potenzreihe in x mit festen Koeffizienten, für die $z(0) = a$, $z'(0) = b$ ist. Gesucht die Lösung der Gleichung $z(\mu x) = \lambda + \varkappa x$, die für $\lambda = a$ verschwindet und sich in der Form

$$x = \frac{\lambda - a}{b\mu - \varkappa} \sum_{r=0}^{\infty} (\lambda - a)^r \varphi_r\left(\frac{\mu}{b\mu - \varkappa}\right)$$

darstellen läßt. Gibt es eine lineare Differentialgleichung („Differentialresolvente"), die die Entwicklungskoeffizienten φ_r rekurrent berechnen läßt? Erledigung des Problems für elementare Funktionen. Nachweis der Existenz einer Differentialresolvente für die Gleichung $x^m z(\mu x) = \lambda + \varkappa x$, wenn z einer Differentialgeichung $z' = R(x, z)$ (R rat. in x und z) genügt. *v. Koppenfels* (Würzburg).

Martin, W. T.: Linear difference equations with arbitrary real spans. Acta math. 69, 57—98 (1938).

The author studies difference equations of the form

$$\sum_{s=0}^{m} c_s(z) F(z + \delta_s) = G(z), \tag{1}$$

and systems of difference equations of the form

$$\sum_{k=1}^{b} \left\{ \sum_{s=0}^{m_{jk}} c_s^{jk}(z) F_k(z + \delta_s^{jk}) \right\} = G_j(z) \qquad j = 1, \ldots, p \tag{2}$$

in which the spans δ_s and δ_s^{jk} are any real non-negative numbers without any arithmetical restrictions and the coefficients $c_s(z)$ and $c_s^{jk}(z)$ are either constants or analytic functions of the complex variable z which are asymptotically constant in strips or sectors containing the real axis. For z real the underlying results concerning (1) had been originally found by the reviewer (see this Zbl. 1, 67), and the generalizations from (1) (2) are based on a symbolic reduction of (2) to (1) as developed by Carmichael (see this Zbl. 6, 169) and the reviewer (see this Zbl. 1, 275). — We shall quote a few results referring to (1). I. If for c_s constant, the function

$$E(t) = \sum_{s=0}^{m} c_s e^{\delta_s t} \tag{3}$$

of the complex variable t has no zeros in the strip $\underline{b}_\sigma < \Re(t) < \bar{b}_\sigma$; if $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{\lambda_n}^\sigma e^{\lambda_n t}$ is the Dirichlet expansion of (3) in the strip and if $G(z)$, $z = x + iy$, is analytic in a strip $\alpha < y < \beta$, and, uniformly in $\alpha < y < \beta$,

$$\underline{b} \leqq \liminf_{x \to -\infty} x^{-1} \log|G(x + iy)|, \quad \limsup_{x \to \infty} x^{-1} \log|G(x + iy)| \leqq \bar{b}, \tag{4}$$

where $\underline{b}_\sigma < \underline{b} \leqq \bar{b} < \bar{b}_\sigma$, then the series $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{\lambda_n}^\sigma G(z + \lambda_n)$ is a solution of (1) within the strip $\alpha < y < \beta$, and it also satisfies (4) uniformly in y; also, (1) has only one solution satisfying (4) for any fixed value of y. II. If $G(z)$ is defined not in a strip (α, β) but in a sector $(-\delta \leqq \arg z = \theta \leqq \pi + \delta)$, $0 < \delta$, then I. holds essentially if we replace $\underline{b}$ by $-h(\pi/G)$ and $\bar{b}$ by $h(0/G)$ where

$$h(\theta/G) = \limsup_{\varrho \to \infty} \varrho^{-1} \log|G(\varrho e^{i\theta})|.$$

III. If $c_s(z)$ are analytic in the sector $S(-\delta \leqq \theta \leqq \delta)$ and $c_s(z) \to c_s$ as $z \to \infty$; if $c_0(z)$ is bounded away from zero in S; if $E(t)$ has no zeros in $-\infty < \Re(t) < \bar{b}_0$; and if, for z in S and $\alpha < y < \beta$, $|G(z)| \leqq A(\alpha, \beta)\, e^{bx}$, where $b < \bar{b}_0$, then there exists one and only one solution $F(z)$ of (1) such that $|F(z)| \leqq A' e^{bx}$ for $z - \delta_0$ in S and $\alpha < y < \beta$. Under additional assumptions, if $G(z)$ and $c_s(z)$ have asymptotic expansions of the type $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$, then $F(z)$ also has one. *Bochner* (Princeton).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Hille, Einar: On the absolute convergence of polynomial series. Amer. Math. Monthly 45, 220—226 (1938).

The paper considers polynomial expansions of the type $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$, where $\{a_n\}$, $\{P_n(z)\}$ are given constants resp. polynomials in the complex variable z. We assume that $P_n(z)$ is of degree n, with all zeros real. Even so restricted, the problem under discussion embraces MacLaurin expansion, as well as expansions in series of orthogonal polynomials, and others well known. The author is concerned with the point — set C_a of absolute convergence of the above series; more precisely: How is C_a affected by a variation in the distribution of the zeros of $\{P_n(z)\}$. The treatment, although elementary, yields interesting results, especially, when additional conditions are imposed: The zeros in question shall be all positive, or that $N(P, a, b)$ — least upper bound of the number $N(P_n, a, b)$ of zeros of $P_n(z)$ in (a, b) — be finite in every finite interval (a, b). *P. Shohat* (Philadelphia).

Sansone, G.: Condizioni sufficienti per il problema dei momenti rispetto al sistema ortogonale di Legendre. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 2, 1—13 (1938).

Let $a_n = o(n^{1/2})$. The author proves that any one of the following three conditions is sufficient in order that the sequence $\{a_n\}$ be a sequence of Legendre coefficients of a function which is Lebesgue integrable over $(-1, 1)$:

$$\text{(I)}\ \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta(a_n/(2n+1))|\, n^{1/2} < \infty; \qquad \text{(II)}\ \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_2(a_n/(2n+1))|\, n < \infty;$$

$$\text{(III)}\ \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_3(a_n/(2n+1))|\, n^2 < \infty.$$

J. D. Tamarkin.

Kaczmarz, S., et J. Marcinkiewicz: Sur les multiplicateurs des séries orthogonales. Studia Math. 7, 73—81 (1938).

Let $\{\varphi_i(t)\}$ be an orthonormal set over $(0, 1)$. We say $\{\lambda_n\} \in (L_p, L_q)$ if for every $f \in L_p$ the series $\sum \lambda_n a_n \varphi_n(t)$, $a_n = \int_0^1 f \varphi_n\, dt$ is a Fourier expansion of a function $g \in L_q$. The following result is proved. If $\varphi_i(t)$ are bounded and $\{\varphi_i\}$ is complete in L then the condition $\{\lambda_n\} \in (L_p, L_q)$, $1 \leqq p < \infty$, $1 \leqq q \leqq \infty$ is equivalent to the following set of conditions (a) $H(x, t) \sim \sum \lambda_n \varphi_n(t) \int_0^x \varphi_n(u)\, du \in L_q$ for each fixed x; (b) for each n and each set of numbers $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ such that $\sum_0^{n-1} |\varepsilon_i|^p = 1$ we have

$$\left\{ \int_0^1 \left| \sum_0^{n-1} \varepsilon_i [H((i+1)/n, t) - H(i/n, t)] \right|^q dt \right\}^{1/q} \leqq M n^{-1/p},$$

where M does not depend on $\{\varepsilon_i\}$ and n. Analogous results are proved in the cases $1 \leqq p < \infty$, $1 < q < \infty$; $p = 1$, $1 < q \leqq \infty$. *J. D. Tamarkin* (Providence. R. I.).

Reihen:

Nicolesco, Miron: Sur les suites doubles. C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 234—236 (1938).

L'auteur appelle „tableau de M. Montel" un tableau infini à double entrée,

dans lequel — s_m^n désignant l'élément commune à la $m^{\text{iéme}}$ ligne et à la $n^{\text{iéme}}$ colonne — chaque ligne et chaque colonne constitue une suite convergente. Il énonce sans démonstration les deux théorèmes suivants dont le premier s'apparente au critère de Cauchy: Th. I. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un tableau de Montel soit convergent est que, étant donné $\varepsilon > 0$, on puisse trouver M et N, tels que $m \geqq M$ et $n \geqq N$ entraînent

$$|\Delta_{m,p}^{n,q}| = |s_m^n - s_{m+p}^n - s_m^{n+q} + s_{m+p}^{n+q}| \leqq \varepsilon$$

quels que soient p et q. — Th. II. Tout tableau de M. Montel, à éléments bornés dans leur ensemble, et globalement monotone (c'est-à-dire tel que $\Delta_{m,q}^{n,q}$ conserve un signe constant), est convergent. *E. Blanc* (Toulon).

Cioranescu, N.: Sur certaines suites infinies, dont les termes sont définis par des relations de récurrence. Rev. math. Union Interbalkan. 2, 27—31 (1938).

L'auteur étudie au point de vue de la convergence certaines suites dans lesquelles le terme général s'obtient à partir des termes précédents par une relation donnée de récurrence: $S_n = f_n(S_1, S_2, \ldots S_{n-1})$. Il examine en particulier le cas de relations de récurrence à un ou deux termes, et de relations linéaires à trois termes. *E. Blanc.*

Sz. Nagy, Bela de: Sur des suites de facteurs multiplement monotones. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1342—1344 (1938).

L'auteur généralise les résultats de sa dernière Note (voir ce Zbl. **18**, 209); le premier au cas d'une suite de multiplicateurs $\lambda(m), \lambda(m+1), \ldots$, triplement monotone; le deuxième au cas d'une suite doublement monotone seulement avec $\sum_m^\infty k^{-1}\lambda(k)$ convergente. *J. Favard* (Grenoble).

Pitt, H. R.: A theorem on absolutely convergent trigonometrical series. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Techn. **16**, 191—195 (1938).

The author gives an "elementary" proof for the case of one variable of the theorem of R. H. Cameron that if $f(x_1, x_2, \ldots)$ is almost periodic, is bounded away from zero, and has an absolutely convergent Fourier series, then $f(x)^{-1}$ also has an absolutely convergent Fourier series. The author carries out Wiener's localisation of the theorem directly on the line $-\infty < x < \infty$ instead of first imbedding it into the space of infinitely many variables on which the given function is limit-periodic. *Bochner* (Princeton).

Randels, W. C.: On the order of the partial sums of a Fourier series. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 286—288 (1938).

It is shown that (a) the well known estimate $S_n(x, f) = o(n)$ for the n-th partial sum of the Fourier series of an integrable function $f(x)$ cannot be improved. Thence it is deduced that (b) if $F(x)$ is an arbitrary absolutely continuous periodic function, then nothing more precise than $S_n(x, F) - F(x) = o(1)$ is true. [The reviewer may add that (a) may be obtained by considering the Fourier series $\sum a_n \cos nx$, where $\{a_n\}$ is a convex sequence, which may tend to 0 as slowly as we wish.] *A. Zygmund.*

Cesari, Lamberto: Sur les propriétés des fonctions représentées par les séries trigonométriques. C. R. Acad. Sci. Roum. **2**, 216—221 (1938).

There are stated without proofs a number of theorems concerning the differentiability of functions represented by a class of trigonometric series, for example: Let us suppose that $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ and that

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{p+1} a_n| n^p < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{p+1} b_n| n^p < \infty,$$

where p is a non-negative integer and $\Delta_{p+1} a_n$ denotes the $(p+1)$-st difference of the sequence $\{a_n\}$. Then the series $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converges in every interval $I_\varepsilon = (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ to a function $f(x)$ such that $f^{(p)}(x)$ exists and is

continuous in I_s. — Extensions to the case when the differences $\Delta_{p+1} a_n$ are replaced by more general expressions. *A. Zygmund* (Wilno).

Hartman, Philip, and Aurel Wintner: On certain Fourier series involving sums of divisors. Trav. Inst. Math. Tbilissi **3**, 113—118 (1938).

Es sei x reell, s komplex, $s = \alpha + it$; für ganzes x sei $\psi(x) = 0$, sonst $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$. Ist $\alpha > 0$, so ist bekanntlich $\Phi_s(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi(mx) m^{-s}$ für fast alle x konvergent. Wegen des Spezialfalles $s = 1$ vgl. S. Chowla und A. Walfisz (dies. Zbl. **10**, 392) und A. Wintner (dies. Zbl. **16**, 397). Hier wird allgemeiner der Fall $\frac{1}{2} < \alpha \leqq 1$ untersucht, und es wird bewiesen: I. Ist $\Phi_{s,n}$ die n-te Partialsumme der Reihe Φ_s, so ist für $2 \leqq q < \frac{1}{1-\alpha}$

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 |\Phi_{s,n}(x) - \Phi_s(x)|^q \, dx = 0, \quad \text{also} \quad \int_0^1 |\Phi_s(x)|^q \, dx < \infty.$$

— II. Für fast alle x ist $\Phi_s(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{d/k} d^{1-s} \cdot \sin 2\pi k x$, und die rechte Seite ist die Fourierreihe der linken. — III. Mit $\alpha = \frac{1}{2}$, $q = 2$ ist I nicht mehr wahr. — IV. Man darf (mutatis mutandis) $\psi(x)$ für $0 < x < 1$ auch durch ein Bernoullisches Polynom höheren Grades ersetzen. *Jarník* (Praha).

Kuttner, B.: The relation between de la Vallée Poussin and Abel summability. Proc. London Math. Soc., II. s. **44**, 92—99 (1938).

Il est connu (Hyslop) que sous la condition $a_n = O(n^k)$ les procédés de sommation (V-P) et (A, 2) sont équivalents et que dans le cas général il existe des séries sommables (A, 2) et non sommables (V-P). L'auteur a prouvé le théorème: La sommabilité (V-P) entraîne celle (A, 2) en démontrant ainsi que le procédé (A, 2) est plus puissant que celui (V-P). *E. Kogbetliantz* (Paris).

Kaluza, Theodor: Über die „Differenzensummation" unendlicher Reihen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, N. F. **1**, 171—179 (1938).

La série $\sum_0^{\infty} a_n$ est dite sommable par le procédé (K) de M. Kaluza avec la somme s si ce nombre s est la limite du rapport des k-ièmes différences des suites $[s_n/a_n]$ et $[1/a_n]$ pour k tendant vers l'infini: $s = \lim_{k=\infty} \frac{\Delta_k\left(\frac{s_0}{a_0}\right)}{\Delta\left(\frac{1}{a_0}\right)}$. — L'auteur établit que pour une série entière le developpement du rapport en question suivant les puissances de z coincide avec la série jusqu'au k-ième terme ce qui indique une parenté entre ce procédé et la théorie des fractions continues. La sommation de $\sum_0^{\infty} (-1)^n n! \cdot z^n$ réussit dans le demiplan $R(z) > 0$ et comme résultat on obtient la transformation de cette série en fraction continue d'Euler $E(z) = \left[\frac{a_n}{1}\right]_1^{\infty}$ avec $a_1 = 1$, $a_{2n} = a_{2n+1} = nz$.
E. Kogbetliantz (Paris).

Rocco Boselli, Anna: Costruzione di serie le cui somme semplici sono le successive medie di Hölder di una serie data. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. **74**, 149—162 (1936).

Rocco Boselli, Anna: Sui coefficienti di Hölder nella somma di una serie divergente, con il metodo delle medie. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. **74**, 163—173 (1936).

Oguievetzky, I.: Sur les méthodes de sommation de Toeplitz et Perron. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr **4**, 65—68 u. franz. Zusammenfassung 68 (1938) [Ukrainisch].

Agnew, Ralph Palmer: Comparison of products of methods of summability. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 327—343 (1938).

Let $A = \{a_{nk}\}$ and $B = \{b_{nk}\}$ be two matrices satisfying the well known Toeplitz conditions $\left(\text{that is } \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < M \text{ for } n = 1, 2, \ldots, \lim_{n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1,\ \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \text{ for } k = 1, 2, \ldots\right)$. There are considered two methods of summation, which are denoted respectively by AB and $A \cdot B$. A sequence $\{s_n\}$ is said to be summable AB to the limit s, if $U_n = \sum_{p=1}^{\infty} a_{np} T_p \to s$, as $n \to \infty$, where $T_p = \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} s_k$. The sequence $\{s_n\}$ is said to be summable $A \cdot B$, to s, if $\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k \to s$ where the matrix $\{c_{nk}\}$ is the composition product $A \cdot B$ of the matrices $\{a_{nk}\}$ and $\{b_{nk}\}$. The main object ob the paper is to compare pairs selected from the four methods $A, B, AB, A \cdot B$. Thus, in spite of the formal resemblance of the methods AB and $A \cdot B$, it turns out that, unless the matrices A and B belong to restricted types, the methods are not consistent (even if $a_{nk} \geqq 0$, $b_{nk} \geqq 0$). If P denotes the method of "weighted" means, then the method AP is stronger than $A \cdot P$. If $a_{nk} \geqq 0$, $b_{nk} \geqq 0$, then each sequence $\{s_n\}$ which lies in an angle less than π in the complex plane and which is summable to s by one of the methods AB and $A \cdot B$, is also summable to s by the other. *A. Zygmund* (Wilno).

Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Kienast, Alfred: Über die asymptotische Darstellung der summatorischen Funktion von Dirichletreihen mit positiven Koeffizienten. Math. Z. **44**, 115—126 (1938).

The following theorem is enunciated. Suppose (I) $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ $(\sigma > 1)$, $a_n \geqq 0$, (II) $(s-1)^{1+\varrho} f(s) = b_0 + b_1(s-1) + \cdots$ is regular at $s = 1$ $(0 < \varrho < 1)$, (III) $f(s)$ is regular in $\alpha \leqq \sigma \leqq 1$, $0 \leqq |t| \leqq T$, except at $s = 1$, and $|f(s)| \leqq c_1 t^b \log^\tau t$ for $\sigma \geqq \alpha$, $t_0 \leqq t \leqq T$ $(0 < \alpha < 1, t_0 > 1, 0 \leqq b \leqq \frac{3}{2})$; then

$$e^{-\omega}\omega^{-\varrho} \sum_{n \leqq e^\omega} a_n = b_0 \Gamma^{-1}(\varrho + 1) + (b_1 - b_0)\Gamma^{-1}(\varrho)\omega^{-1} + \omega^{-1}R, \tag{1}$$

$$|R| < c_2[\omega T^{-\frac{1}{2}} + \omega^{-1-\varrho} T^{-\frac{1}{2}} \log^\tau T + e^{-\omega(1-\alpha)}(T^b \log^\tau T + T^{1-\varrho})],$$

where $c_1, c_2, \ldots$ are constants independent of ω, T, α. The argument is a further development of the Wiener-Heilbronn-Landau method along the lines of a previous paper by the author (see this Zbl. **17**, 55), involving now an application of Cauchy's theorem. The theorem is true when $\varrho = 1$ and $b_0 = 0$ and yields, on taking $\alpha = 1 - \varkappa(\log T)^{-\gamma}$, $(\log T)^{1+\gamma} = \vartheta\omega$ (ϑ a suitable constant), the best known form of the prime number theorem, viz. $e^{-\omega}\psi(e^\omega) = 1 + O(e^{-p\omega^q})$ $[q = 1/(1+\gamma) > 2, p > 0]$ (Tchudakoff). In the theorem quoted above, however, the first two terms on the right of (1) should be replaced by a more complicated expression, for the assertion on p. 121 that $\Phi(\sigma)$ is real [based apparently on the assumption that $(s-1)^\varrho = |s-1|^\varrho e^{\varrho\pi i}$ is real for real $s < 1$] is incorrect for non-integral ϱ, and the imaginary part of $\Phi(\sigma)$ makes in fact a contribution which cannot be absorbed into the error term $\omega^{-1}R$. *Ingham.*

Dvoretzky, Aryeh: Sur les singularités des fonctions analytiques réprésentées par des séries de Dirichlet. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1438—1440 (1938).

L'aut. montre que la méthode qu'il a donnée pour l'étude des positions des singularités polaires des fonctions définies par les séries de Taylor (voir ce Zbl. **17**, 72) s'applique aussi au cas des fonctions définies par des séries de Dirichlet. Il utilise à cet effet un théorème général sur les ensembles fermés de points d'un plan, analogue à celui qu'il avait donné dans une Note antérieure (voir ce Zbl. **18**, 210) mais il y introduit une expression considérée par C. Biggeri dans une étude voisine (voir ce Zbl. **18**, 121). Il arrive ainsi à déterminer la position des singularités polaires dans tout demi-plan de méromorphie et la singularité non polaire de module minimum, si elle existe, sur la fontière du plus étendu de ces demi-plans. *G. Valiron* (Paris).

Wolf, František: Approximation by trigonometrical polynomials and almost periodicity. Proc. London Math. Soc., II. s. **44**, 100—114 (1938).

Es ist bekannt, daß die gleichmäßige Konvergenz einer Folge von trigonometrischen Polynomen $P_n(x) = \sum_\lambda a_\lambda^{(n)} e^{i\lambda x}$ in jedem endlichen Intervall keineswegs die Fastperiodizität der Grenzfunktion $f(x)$ impliziert. In der Tat folgt leicht aus dem Weierstraßschen Approximationssatz, daß jede beliebige stetige Funktion in diesem Sinne durch trigonometrische Polynome approximierbar ist. Der Verf. beweist nun, daß $f(x)$ notwendig fastperiodisch ist, falls erstens für alle n eine Ungleichung $|P_n(x)| \leqq M(1+|x|^m)$ mit von n unabhängigen M und m erfüllt ist, und zweitens entweder a) $f(x)$ beschränkt und die Exponenten der Polynome alle einer beschränkten reduktiblen abzählbaren Menge entnommen sind oder b) $f(x)$ beschränkt und gleichmäßig stetig und die Exponenten alle einer beliebigen reduktiblen abzählbaren Menge entnommen sind. Der Beweis geschieht durch transfinite Induktion nach der Ordnung der reduktiblen Menge und basiert auf einer Reihe von Hilfssätzen, die darauf beruhen, daß die Anbringung eines Multiplikators $\varphi(\lambda)$ in den Koeffizienten eines trigonometrischen Polynoms einer Faltung des Polynoms mit der Fouriertransformierten von $\varphi(\lambda)$ entspricht. Durch Ausnützung der weitgehenden Willkürlichkeit der Multiplikatoren $\varphi(\lambda)$ außerhalb der Exponentenmenge ist es möglich, den Beweis etwas kürzer zu gestalten. Ein Beispiel zeigt, daß die Voraussetzung der Reduktibilität wesentlich ist. Eine Übertragung der Sätze zu fastperiodischen Funktionen im Besicovitchschen Sinne wird kurz besprochen.

B. Jessen (Kopenhagen).

Spezielle Funktionen:

Angelescu, A.: Sur certains polynomes généralisant les polynomes de Laguerre. C. R. Acad. Sci. Roum. **2**, 199—201 (1938).

Die Laguerreschen Polynome $P_n(x)$ werden definiert durch

$$P_n(x) = \frac{e^{-x}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^x x^n).$$

Verf. betrachtet nun die Polynome

$$\Pi_n(x) = \frac{e^{-x}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\{e^x A_n(x)\};$$

hierin ist $A_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades in x mit $A_n'(x) = n A_{n-1}(x)$. Er leitet für die Polynome $\Pi_n(x)$ eine erzeugende Funktion der Gestalt

$$\frac{1}{1-\alpha}\varphi\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)e^{\frac{\alpha x}{1-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n \Pi_n(x) \tag{1}$$

ab. Ist $A_n(x) = x^n$, so erhält man die bekannte erzeugende Funktion der Laguerreschen Polynome. Verf. nimmt jetzt an, daß die in (1) auftretende Funktion $\varphi(z)$ eine ganze Funktion ist und beweist: Hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ einen Konvergenzradius >1, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Pi_n(z)$ in der ganzen Ebene absolut konvergent.

C. S. Meijer (Groningen).

Syôno, Sigekata: A short note on Whittaker's solution of the equation of wave motions. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **20**, 100—104 (1938).

Let $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\Phi, \ y = r\sin\theta\sin\Phi, \ z = r\cos\theta \\ w = x\sin u\cos v + y\sin u\sin v + z\cos u, \quad d\Omega = \sin u\, du\, dv \end{cases}$ then if the integration is over all angular space and α is real or complex

$$\iint e^{\pm ikw} d\Omega \cdot \bar{P}_n^m(\cos u)\cos(mv-\alpha) = (2\pi)^{\frac{3}{2}}(\pm i)^n (kr)^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\bar{P}_n^m(\cos\theta)\cos(m\Phi-\alpha)$$

where $\bar{P}_n^m$ is the associated Legendre function of Ferrers. When the integration with respect to u is from 0 to $\frac{1}{2}\pi + i\infty$ while that with respect to v is from 0 to 2π there is a corresponding formula involving the Hankel function and Hobson's associated Legendre function which is useful in seismology.

H. Bateman (Pasadena).

Drach, Jules: Sur l'équation différentielle du troisième ordre des fonctions ϑ elliptiques. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1421—1424 (1938).

Die für $\Re(i\tau) < 0$ und $\sum_{-\infty}^{\infty} {}_h e^{\pi i h^2 \tau} = \vartheta$ bestehende Differentialgleichung

$$(\vartheta^2\vartheta''' - 15\,\vartheta\vartheta'\vartheta'' + 30\,\vartheta'^3)^2 + 32(\vartheta\vartheta'' - 3\,\vartheta'^2)^3 = \vartheta^{10}(\vartheta\vartheta'' - 3\,\vartheta'^2)$$

vereinfacht sich, wenn

$$\pi i\, d\tau\, \vartheta^4 = \frac{d\lambda}{\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{d\tau}{d\lambda} = \dot{\tau}$$

gesetzt wird, zu

$$2\,\frac{\dddot{\tau}}{\dot{\tau}} - 3\left(\frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda-1)^2} + \frac{1}{\lambda - \lambda^2} = 0.$$

Wilhelm Maier.

Petersson, Hans: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen. III. Divisorentheorie und automorphe Primformen; Summandensysteme; arithmetisch ausgezeichnete Multiplikatorsysteme. Math. Ann. **115**, 518—572 (1938).

Fortsetzung zu dies. Zbl. **18**, 62. — l) Die Ordnung des Divisors einer a. F. erhält man durch Integration ihrer log. Ableitung über den Rand eines kan. F.B. Andererseits läßt sich für Γ erster Art, $\sigma \geqq 0$, dieses Integral durch das Symbol w_n aus c) ausdrücken, dessen Argumente die Erzeugenden aus e) sind. Die in w_n auftretenden arg-Werte stehen in Zusammenhang mit den Zentriwinkeln der Randbogen des kan. F.B. und diese wieder in Zusammenhang mit der Summe der Innenwinkel des F.B. So läßt sich w_n und damit die Ordnung des Divisors elementar berechnen und man findet die Richtigkeit der Formel aus i) für $\sigma \geqq 0$. Für $\sigma > 0$ gibt Verf. noch eine zweite elementare Berechnungsweise von w_n. — m) Nun folgt, daß für $\sigma = 0$ ein M.S. und a. F.en dann und nur dann existieren, wenn r ein Vielfaches einer gewissen rationalen Zahl ist, die von Γ abhängt. Sodann werden vollständige Systeme automorpher Primformen für Γ erster Art und Formeln für die M.S. von Primformpotenzprodukten aufgestellt, die allerdings sehr unübersichtlich sind. — n) Für Γ erster Art werden notw. und hinr. Beding. für die Existenz von M.S.en aufgestellt, die nur Werte der Form $e^{\pi i r \frac{b}{n}}$ mit vorgegebenem ganzen n und beliebigen ganzen b enthalten. Im Zusammenhang damit wird auch die Frage beantwortet, wann Γ eine Untergruppe enthält, die $-I$ nicht enthält, aber zu Γ einstufig isomorph ist.

Lochs.

Hecke, Erich: Neuere Fortschritte in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. (*Oslo, 14.—18. VII. 1936.*) C. R. congr. int. Math. **1**, 140—156 (1937).

Die beiden ersten Abschnitte dieses Vortrages geben einen Überblick über neuere Ergebnisse aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen, für die eine ausführliche Darstellung schon vorliegt. In Abschnitt 1 wird der Zusammenhang zwischen Dirichletreihen mit Funktionalgleichung des bekannten Typus und automorphen Formen behandelt (E. Hecke, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung. Math. Ann. **112**; dies. Zbl. **14**, 16). In Abschnitt 2 wird über das Bestehen der Eulerschen Produktentwicklung für diejenigen Dirichletreihen berichtet, die nach 1 den elliptischen Modulformen zugeordnet sind (E. Hecke, Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung, I, II. Math. Ann. **114**; dies. Zbl. **15**, 402 u. **16**, 355). In Abschnitt 3 werden die Fragen diskutiert, die sich ergeben, wenn man die Ergebnisse aus 2 auf mehrfache Thetareihen mit beliebiger gerader Variablenzahl anwendet. Das Beispiel der ganzen zu $\Gamma_0(31)$ gehörigen Modulformen wird durchgeführt. Es gibt hier 3 ganze Modulformen der Dimension -2. Diese lassen sich als vierfache Thetareihen der Diskriminante 31^2 darstellen. Aus der durch sie definierten linearen Schar werden 3 linear unabhängige Funktionen angegeben, für deren zugeordnete Dirichletreihen ein Eulerprodukt existiert. Eine davon ist die ζ-Funktion des definiten Quaternionenbereichs der Diskriminante -31^2. Die Bedeutung der beiden anderen Funktionen für die Arithmetik ist unbekannt.

Bruno Schoeneberg (Hamburg).

Maass, H.: Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in zwei Variablen. Math. Z. **43**, 709—738 (1938).

Verf. überträgt Begriffsbildungen aus der Peterssonschen Theorie der automorphen Formen auf zwei Variable und konstruiert für die engere Hilbertsche Modulgruppe des reell quadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{D})$ mit der Diskriminante $D \equiv 5 \pmod{8}$ und der Klassenzahl 1 ganze Modulformen halbzahliger Dimension. Zunächst berechnet er das Multiplikatorsystem von $\vartheta(\tau, \tau') = \sum_{\mu \subset \nu} e^{\pi i S \frac{\mu^2 \tau}{\sqrt{D}}}$ [$\mathfrak{Im}\,\tau > 0$, $\mathfrak{Im}\,\tau' < 0$, ν Maximalordnung in $R(\sqrt{D})$, S die in üblicher Weise definierte Spur, entsprechend des nachher gebrauchten N]. Dann werden mit diesen Multiplikatoren die Eisensteinschen Reihen der halbzahligen Dimension $-r$ zur Idealstufe ν, wo (ν) ein ganzes Ideal aus $R(\sqrt{D})$, durch den Nullwert der in s analytischen Funktion

$$G_{-r}(\tau; s, \alpha_1, \alpha_2, \nu) = \sum_{\substack{\mu_i \equiv \alpha_i(\nu) \\ (\mu_1, \mu_2) = 1}}' \frac{v_0(\mu_1, \mu_2)}{N(\mu_1 \tau + \mu_2)^r \, |\mu_1 \tau + \mu_2|^s}$$

eingeführt. Hierbei erstreckt sich die Summe nur über Zahlenpaare (μ_1, μ_2), die mod. νp_∞ nicht assoziiert sind. Für $\nu \equiv 0 \pmod{4}$ wird gezeigt, daß es zu jeder ganzen Modulform $\varphi(\tau)$ von der halbzahligen Dimension $-r \leqq -\frac{3}{2}$, der Stufe ν und dem ϑ-Multiplikatorsystem eine Linearkombination Λ der G_{-r} gibt, so daß $\varphi(\tau) - \Lambda$ in allen parabolischen Spitzen verschwindet. Bei $r = \frac{3}{2}$ wird noch $N(\varepsilon) = -1$ für die Grundeinheit ε in $R(\sqrt{D})$ vorausgesetzt. Anschließend wird für die von Siegel (in anderer Gestalt) eingeführte Geschlechtsinvariante $F(\mathfrak{Q}; \tau) = \sum_{\mu_i \subset \nu} e^{\pi i S \frac{\mathfrak{Q}(\mu_1, \ldots, \mu_k)\tau}{\sqrt{D}}}$ zu einer primitiven total positiv definiten quadratischen Form $\mathfrak{Q}$ ungerader Variablenzahl $k \geqq 3$ bei $D \equiv 5 \pmod{8}$ die Partialbruchentwicklung angegeben. $F(\mathfrak{Q}; \tau)$ erweist sich als Form der Stufe $\nu = 8D\Delta_1 \ldots \Delta_r$, wo die Δ_i die Hauptunterdeterminanten von $\mathfrak{Q}$ sind, und ist unter den oben genannten Voraussetzungen eine Linearkombination der Eisensteinreihen $G_{-\frac{k}{2}}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$. *Bruno Schoeneberg* (Hamburg).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Neumer, Walter: Über gewisse Beziehungen, welche bei der allgemeinsten Differentialgleichung dritter Ordnung stattfinden, die durch Berührungstransformation in $y''' = 0$ übergeführt werden kann. J. reine angew. Math. **178**, 214—228 (1938).

The paper studies equations equivalent to $y''' = 0$ under contact transformations, with particular reference to the subgroups of the groups admitted by the equations and to the first integrals. One of the results of the analysis is: If $I(m)$ denotes the family of integral curves having slope m at the point x_0, y_0, there is for any distinct pair of values m, m' a contact transformation simultaneously carrying $I(m)$ into the straight lines and $I(m')$ into the points of the plane. *J. M. Thomas* (Durham).

Vessiot, E.: Sur une classe de faisceaux complets de degré 2. Bull. Soc. Math. France **65**, 149—167 (1937).

Tout faisceau complet de degré 2 à variables u, v séparées

$$Uf = \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda_\alpha(x_1, \ldots, x_n; u) \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad Vf = \frac{\partial f}{\partial v} + \mu_\alpha(x_1, \ldots, x_n; v) \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$$

($\alpha = 1, \ldots, n$; à sommer) peut être réduit à la forme suivante (faisceau de Lie)

$$Uf = \frac{\partial f}{\partial u} + \varphi_\beta(u) L_\beta f, \qquad Vf = \frac{\partial f}{\partial v} + \psi_\beta(v) M_\beta f \tag{1}$$

($\beta = 1, \ldots, r$) où $L_1, \ldots, L_r$ et $M_1, \ldots, M_r$ constituent deux groupes simplement transitifs réciproques. Les groupes peuvent être considérés comme des groupes

paramétriques d'une certaine structure, pour laquelle le produit de deux transformations $T_{(c_1,\ldots,c_r)} = T_{(a_1,\ldots,a_r)} T_{(b_1,\ldots,b_r)}$ est défini par des formules telles que $c_h = \Omega_h(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_r)$, $h = 1, \ldots, r$, les Ω_h étant des fonctions convenables. L'intégrale générale du système de Pfaff, dualistique de (1), est alors $x_h = \Omega_h(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_r)$ où les b_h sont des fonctions de u seul et les a_h des fonctions de v seul; ces fonctions $a_1, \ldots, a_r$ et $b_1, \ldots, b_r$ s'obtiennent par l'intégration de deux systèmes d'équations différentielles ordinaires indépendants l'un de l'autre.

O. Borůvka (Brno).

Vessiot, Ernest: Sur la recherche des équations $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ intégrables par la méthode de Darboux. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 728—730 (1938).

The author indicates how to extend the results of his previous papers (this Zbl. **17**, 401; **18**, 125) to the case where the order of the invariants of the characteristic system exceeds two. *J. M. Thomas* (Durham).

Levi, B.: Una proprietà del sistema delle derivate parziali n-me di una funzione di più variabili. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **26**, 198—202 (1937).

Consider the linear differential form $P_\alpha\, dx_\alpha$, where α is summed from 1 to r and the P's are linear in the partial derivatives $\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n} F}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_r^{i_r}}$ of order not exceeding n. It is proposed to determine the coefficients of the P's as functions of $x_1, \ldots, x_r$ so that $P_\alpha dx_\alpha$ is a perfect differential for all F. The general solution is $c_\beta\, dy_\beta$, where the c's are arbitrary constants and the y's are the functions

$$(D-1) \ldots (D-n+p) \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_r^{i_r}} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

with $D = x_\alpha \frac{d}{dx_\alpha}$. *J. M. Thomas* (Durham).

Cramlet, Clyde M.: Note on integrability conditions of implicit differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 107—109 (1938).

The author defines a complete system of partial differential equations which, brought into the special form treated by the Riquier theory by means of the implicit function theorem, proves to be integrable. Since conversely an integrable system is reducible to a complete system, the extension of the Riquier theory to systems of implicit equations is fully obtained. *Raudenbush* (New York).

Cramlet, Clyde M.: Differential invariant theory of alternating tensors. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 110—114 (1938).

The results of the author's preceding note are used to complete his former results on the invariants of an n-ary q-ic form [Ann. of Math. (2) 31, 134—150 (1930)]. The particular case to be dealt with is the case in which the form is alternating.

Raudenbush (New York).

Tolotti, C.: Sul problema di Cauchy nel caso non analitico. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **27**, 212—216 (1938).

Für das Anfangswertproblem von Cauchy-Kowalewski wird angenommen, daß die vorgegebenen Funktionen nichtanalytische Funktionen ihrer Argumente, vielmehr nur endlich oft nach diesen differenzierbar seien. Dann wird eine Funktion konstruiert, die das gestellte Anfangswertproblem approximativ, bis auf Glieder höherer Ordnung, löst. *Rellich* (Marburg, Lahn).

Frankl, F.: Über das Anfangswertproblem für lineare und nichtlineare hyperbolische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Rec. math. Moscou N. s. 2, 793—811 u. deutsch. Zusammenfassung 812—814 (1937) [Russisch].

Der Verf. benutzt die Methoden von Schauder (dies. Zbl. 11, 352) und Petrowsky (dies. Zbl. 18, Heft 9). Wenn man das Vorhandensein der Lösung fast überall im Sinne von Lebesgue studiert, so kann man unter gewissen Zusatzbedingungen beweisen, daß für die Existenz und Unität der Lösungen der linearen Gleichungen (innerhalb

eines Bereiches, der seitlich von einer charakteristischen Fläche begrenzt ist) das Vorhandensein der ersten und zweiten Ableitungen auf der Anfangsfläche genügt. Die Lösung wird im Bereiche ihrer Unität ebensoviel Ableitungen wie auf der Anfangsfläche besitzen. Man kann diese Lösung durch Polynome approximieren, deren Koeffizienten aus der Minimumbedingung für die Summe einer quadratischen und einer Linearform bestimmt werden. Für quasilineare Gleichungen ergibt sich, daß wenn auf der Anfangsfläche fast überall alle Ableitungen bis zur Ordnung $N = 2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 4$ (n = die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen) existieren, so existiert auch fast überall die Lösung mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung N. Für allgemeine nichtlineare Gleichungen wird ein analoger Satz bewiesen. *Janczewski* (Leningrad).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Beier, Kurt: Über das Gleichgewicht im Potentialfeld. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 48, Abt. 1, 29—40 (1938).

Nach dem bekannten Satz von Earnshaw ist stabiles Gleichgewicht einer elektrischen Ladungsverteilung in einem regulären Potentialfeld nicht möglich. Ebenso ist der Fall labilen Gleichgewichts ausgeschlossen. Verf. untersucht, in welchen Fällen indifferentes Gleichgewicht eintritt, wobei die potentielle Energie der Ladungsverteilung bei kleinen Verrückungen konstant bleibt. Eine Ladungsverteilung stetiger Dichte sei derart im Innern einer Einheitskugel angeordnet, daß ihr Potential außerhalb dieser Kugel regulär sei. Sie befinde sich in einem regulären Potentialfeld. Die Energie der Ladungsverteilung im Potentialfeld läßt sich unter Heranziehung der Poissonschen Formel durch die Energie einer Oberflächenladung auf der Einheitskugel im Potentialfeld ausdrücken. Für die Energie ergibt sich ein Integral, dessen Integrand eine unendliche Reihe von Oberflächenkugelfunktionen mit konstanten Koeffizienten enthält. Die Untersuchung dieses Integrals ergibt, daß die Energie dann und nur dann konstant ist, wenn das Potential der Ladungsverteilung ein harmonisches Polynom von einem Grad m ist, wobei alle Oberflächenkugelfunktionen, deren Ordnung kleiner oder gleich m ist, Null gesetzt werden. Zum Schluß geht Verf. auf die physikalische Deutung seines Ergebnisses ein. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Fjeldstad, Jonas Ekman: Zwei Probleme aus der Wärmeleitungstheorie. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo 1938, 1—24 (Nr 2).

I. In einem dreidimensionalen Gebiete Ω mit der Oberfläche Σ wird gesucht eine Lösung von $u_t = a\Delta u + f(x, y, z, t)$ mit den Nebenbedingungen $u = \psi(x, y, z)$ für $t = 0$ und $au_n + bu = \varphi(x, y, z, t)$ auf Σ; hierbei sind a und b Konstanten, n gibt die Ableitung in der Normalenrichtung an. Verf. gewinnt eine Lösung der Aufgabe durch Zurückführung auf eine Integralgleichung mit Hilfe der Greenschen Funktion für Ω und $\Delta u = 0$. — II. Verf. findet eine Reihenentwicklung für die für $t = 0$ verschwindende Lösung von $u_t = au_{xx}$ in $0 < x < h$ mit den Randbedingungen $u(0, t) = 0$ und $au_x(h, t) = f(t)$. *W. Feller* (Stockholm).

Théodoresco, N.: Sur l'équilibre des milieux continus. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 8, 179—185 (1937).

In the first problem the Lamé ellipse is a circle at each point. The case corresponding to a perfect fluid is disregarded and the equations for the other case $N_x + T_y = \varrho X$, $T_x - N_y = \varrho Y$ are treated on the assumption that X and Y are within D continuous functions, F, both satisfying a Hölder condition of type $|F(P) - F(P')| < K(PP')^2$ $(0 < a < 1)$. It is supposed, moreover, that on the boundary C of D there is a linear relation of type $a(s)T(s) + b(s)N(s) = c(s)$ where $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ are continuous functions of the arc s of the curve C, which is supposed to be a simple closed curve with a single tangent varying in a continuous way with s. By using the areolar derivative the problem is reduced to one of Hilbert's type. In the second problem the directions of the principal stresses are supposed to be the same at each point and the partial

differential equations become $U_x + T_x + kT_y = k\varrho X$, $U_y + kT_x - T_y = k\varrho Y$ where k and ϱ are real constants. Unlike the previous equations these equations have real characteristics $kx^2 - 2xy - ky^2 = 0$. It is assumed that X and Y are of class C' and that the problem is well put in Hadamard's sense so that the angle between the characteristic directions at any point close to the curve C cut out an infinitesimal arc on C. The functions U and $V = T(1 + k^2)^{\frac{1}{2}}$ are then determined so as to have assigned values of class C' on C. *H. Bateman* (Pasadena).

Mateesco, Cristea: Équilibre d'une membrane au pourtour rectangulaire, soumise à une charge variant suivant la loi des pressions hydrostatiques. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **8**, 115—124 (1937).

The partial differential equation $H(z_{xx} + z_{yy}) = -\gamma x$ is treated by assuming that $z = \sum X_k(x) \cos(k\pi y/2b)$ the summation being eventually over odd values of k. It is found that

$$2a^3\pi kH X_k(x) \operatorname{sh}(k\pi a/b) = (-)^{\frac{k+1}{2}} 32\gamma[2a \operatorname{sh}(k\pi x/2b) - x \operatorname{sh}(k\pi a/2b)]\, ab^2.$$

The cases $2b \gg 2a$, $b = 2a$, $b = a$, $2b = a$, $2a \gg 2b$ are discussed in detail. *H. Bateman.*

Franzì, Gianni: Sulla estensione ai fluidi viscosi incompressibili di alcuni problemi relativi alle cavitazioni nei fluidi perfetti. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **7**, 147—156 (1938).

The aim is to find for incompressible viscous fluids solutions of the following problems: (1) The formulation of conditions necessary for the production of a cavity within the body of the fluid. (2) To study in the case of plane motion the occurrence of cavitation on the wall of a solid suddenly set in motion in an infinite mass of fluid. — There is a parallelism between the solutions found here and those found by Demtchenko (Problèmes mixtes harmoniques, Paris 1933) for the case of a perfect fluid. Except that the boundary conditions are different. In the first problem the boundary conditions formulated by Bouligand for perfect fluids are corrected. — In the second problem the hypothesis of a sudden start in the motion of the solid seems essential in the author's treatment for the case of a viscous fluid. This hypothesis was adopted by Riabouchinsky in his reduction of the problem for a perfect fluid to a mixed harmonic problem but the author shows that the same reduction can be effected without this hypothesis. *H. Bateman* (Pasadena).

Fues, E.: Zur dynamischen Theorie der Raumgitterbeugung. I. Z. Physik **109**, 14—24 (1938).

Es handelt sich um die Fortpflanzung einer skalaren Welle in einem dreidimensional-periodischen Medium. Diese Aufgabe führt auf eine dreidimensionale Hillsche Differentialgleichung. Verf. löst diese Gleichung nach der Störungsrechnung, wobei als nullte Näherung rein periodische Wellen angenommen werden. Hieraus ergeben sich die Sperrflächen der Wellenausbreitung. Für die Eigenwerte der Aufgabe im Innern eines Kristalls ergeben sich mit Hilfe der nullten Näherungslösung in erster Näherung Gleichungen, die die Form einer Säkulargleichung haben. Hieraus ergeben sich Sperrbereiche für die Wellen an Stelle der Flächen in erster Näherung. Verf. behandelt dann die Randaufgabe an der Kristallbegrenzung und erhält als Sonderfall die Abweichung des Gebietes der Totalreflexion vom Braggschen Winkel. *Strutt.*

Pipes, Louis A.: Operational and matrix methods in linear variable networks. Philos. Mag., VII. s. **25**, 585—600 (1938).

Die Vorteile der Laplaceschen Transformation und der Matrizenrechnung bei der Lösung der Differentialgleichung der elektrischen Vorgänge in linearen Netzen werden erläutert. Insbesondere werden Netze behandelt, deren Parameter in vorgegebener Weise sich stetig mit der Zeit oder sprungweise zwischen konstanten Werten ändern. Die Lösung der Differentialgleichung wird durch sukzessive Approximation abgeleitet und der Konvergenzbeweis hierfür geliefert. Die Methode wird auf spezielle Beispiele angewandt und auf ein System von Gleichungen mit variablen Koeffizienten erweitert. *Karl Pohlhausen* (Berlin-Halensee).

Datzeff, Assène: Intégration graphique de certaines équations différentielles. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 881—883 (1938).

Im Anschluß an frühere Betrachtungen des Verf. (vgl. dies. Zbl. **16**, 403) wird eine graphische Methode zur Integration der Schrödingergleichung entwickelt, die auf einer Anwendung des Multiplikationsverfahrens von Ponchet beruht. *O. Klein.*

Petiau, Gérard: Sur les fonctions propres des opérateurs fondamentaux de la théorie d'électron de Dirac. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1455—1457 (1938).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Kawata, Tatsuo: A note on the trigonometrical integral. Tôhoku Math. J. **44**, 204—210 (1937).

The well known theorem of Steinhaus, according to which the convergence everywhere of $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ to a sum $s(x) \geqq 0$ implies $s(x) \in L$, has no analogue for the Fourier transforms as is shown by the example $\int_0^{\infty}(\cos xu)/\log(2+u)\,du$, due to Hille and Tamarkin (this Zbl. 8, 11). The author proves, however, that if $\int_0^{\infty}\{f(u)\cos xu + g(u)\sin xu\}\,du$ converges everywhere in $(-\infty, \infty)$ to $F(x) \geqq 0$, where f, g are L-integrable over every finite interval, and if in addition

$$\int_0^{\infty} u^{-1}f(u)\sin xu\,du + \int_0^1 u^{-1}g(u)(1-\cos xu)\,du - \int_1^{\infty} u^{-1}g(u)\cos xu\,du$$

converges boundedly with respect to x, then $F(x) \in L$ on $(-\infty, \infty)$. *J. D. Tamarkin.*

Schönberg, Mario: Ein neuer Typus von verallgemeinerten Fourier-Integralen. Ann. Acad. Brasil. Sci. **9**, 327—330 (1937) [Portugiesisch].

Verf. weist auf die Zweckmäßigkeit hin, die Entwicklung einer Funktion nach den Eigenfunktionen eines Operators mit kontinuierlichem Spektrum nicht durch gewöhnliche, sondern durch Stieltjessche Integrale zu geben. *G. Cimmino* (Napoli).

Kober, H.: Unbeschränkte Operatoren, die eine Verallgemeinerung der Fourier-Transformationen sind. Quart. J. Math., Oxford Ser. **9**, 41—52 (1938).

Let $\chi(x)/x \in L_2(0, \infty)$. The author studies the transformation $T = T[\chi]$ defined by (*) $g = Tf$, $\int_0^u g(\xi)\,d\xi = \int_0^{\infty}\chi(tu)t^{-1}f(t)\,dt$. Several properties of these transformations are established, of which the following will be mentioned here. (1) A necessary and sufficient condition that $T[\chi]$ be limited is that its domain $D_T = L_2$. (2) In order that a transformation T_1 would coincide with $T[\chi]$ it is necessary and sufficient that (**) $T_1\{f(\alpha x)\,|\,y\} = \alpha^{-1}T_1\{f(x)\,|\alpha^{-1}y\}$, $\alpha > 0$ for each f in the domain of T_1 and that T_1 be the smallest closed linear extension of a transformation T_0 whose domain consists of the set of function $u(x/a)$, $a > 0$, where $u(x) = 1$ for $0 \leqq x \leqq 1$ and $= 0$ elsewhere. (3) T is isometric if and only if it is "of Fourier type", that is $D_T = L_2$ and $T[\chi]$ is the inverse of $T[\bar{\chi}]$. (4) The transformation $T[\chi]$ has a unique inverse with domain L_2 if and only if $|\omega(t)| \geqq c > 0$ where

$$\omega(t) \equiv (\tfrac{1}{2} - it)\int_0^{\infty}\chi(x)x^{-\frac{3}{2}+it}\,dx \geqq c > 0,$$

and $\int_0^{\infty}$ is understood as the limit in mean of order 2 of $\int_{1/n}^{n}$ as $n \to \infty$. Several examples are discussed. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Fubini Ghiron, Eugenio: Sopra alcuni procedimenti di calcolo operazionale. Rend. Circ. mat. Palermo **61**, 1—42 (1937).

This paper shows in an elementary manner how the theory of the Laplace transformation may be used to explain common processes of the Heaviside operational

calculus. The applications considered are those dealing with electric circuits and the significance of the "starting from rest" hypothesis is discussed in detail. *Murnaghan.*

McLachlan, N. W.: Operational systems. Philos. Mag., VII. s. 25, 259—269 (1938).

This paper attributes the lack of confidence shown by some engineers in the methods and results of "operational calculus" to the fact that there are several linear operators (e. g., Laplace transformation, Mellin transformation etc.) which are sometimes not clearly distinguished from one another. The author expresses the opinion that for general purposes in technical applications the Mellin inversion theorem is very satisfactory. *Murnaghan* (Baltimore).

Churchill, R. V.: Additional notes on the inversion of the Laplace transformation. Math. Z. 43, 743—748 (1938).

This note contains various additions to the author's earlier paper (this Zbl. 16, 259). The references to the literature are completed. The author further considers the validity of his series inversion formula

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{s_n t} \sum_{p=1}^{\sigma_n} A_{np} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}, \tag{1}$$

where s_n are the poles of $f(s)$ of order σ_n and A_{np} are the coefficients in the corresponding Laurent expansion of $f(s)$ about s_n. The author is now concerned with the case in which for some fixed $k > 0$, $|s^\varkappa f(s)|$ is bounded at all points in a left half-plane located on a sequence of parabolas, and proves the convergence of the series (1) provided the terms corresponding to poles lying between adjacent parabolas are grouped together as a single term. This assumption is convenient for the applications to the heat equation one of which is given in this note. *E. Hille.*

Guinand, A. P.: Summation formulae and self-reciprocal functions. Quart. J. Math., Oxford Ser. 9, 53—67 (1938).

The author continues his investigations of summation formulas associated with Dirichlet's series (this Zbl. 18, 132). He is now concerned with expressions of the form

$$\lim_{N\to\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-\frac{1}{2}(\beta-1)} f(n) - \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}(\beta-1)} f(x)\, dR_0(x) \right\}. \tag{1}$$

Here $f(x)$ is an integral and $f(x)$ and $x f'(x)$ belong to $L_2(0,\infty)$. Further $\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ is holomorphic in $\sigma > \frac{1}{2}\beta$, and the coefficients a_n are supposed to be such that $\sum_{n<x} a_n = R_0(x)$ with an error $O(x^\eta)$, $\eta < \frac{1}{2}\beta$, as $x\to\infty$, and $R_0(x)$ is a finite combination of terms of the form $x^m(\log x)^n$. Finally $R_0(x)$ is $O(x^\theta)$ with $\theta > \frac{1}{2}\beta$ as $x \to 0$. The author then shows that (1) exists and equals a limit of the same type with $f(x)$ replaced by its χ-transform $g(x)$. Here

$$\int_0^x g(y)\, dy = \int_0^\infty f(y)\, \chi(xy) \frac{dy}{y},$$

and

$$\chi(x) = \text{l.i.m.} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\psi(\frac{1}{2}-it)}{\psi(\frac{1}{2}+it)} \frac{x^{\frac{1}{2}-it}}{\frac{1}{2}-it}\, dt.$$

Generalizations and numerous examples. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Bucerius, H.: Integralgleichungstheorie des Sternaufbaus. I. Die polytrope Gaskugel. Astron. Nachr. 265, 145—158 (1938).

In dieser ersten Mitteilung wird, um die Methode zu zeigen und zu erproben, das Emdensche Randwertproblem für den Aufbau einer polytropen Gaskugel mit Hilfe der Greenschen Funktion in eine Integralgleichung umgeformt, die (außer für den Polytropenindex $n = 1$) nichtlinear ist. Die Auflösung geschieht mit Hilfe der Methode der unendlich vielen Variablen, für deren Anwendung auf nichtlineare Integralgleichun-

gen Verf. sich auf **Hammerstein** beruft; vgl. dazu L. **Lichtenstein**, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, IV. Kapitel, Berlin 1931. Das unendliche Gleichungssystem für die unendlich vielen unbekannten Koeffizienten wird mittels sukzessiver Approximationen behandelt, die schon mit geringem Rechenaufwand eine befriedigende numerische Näherung liefern, z. B. für das allen Polytropen einer Klasse gemeinsame Verhältnis der Dichte im Mittelpunkt zur mittleren Dichte. Die Kraft der Integralgleichungstheorie soll sich namentlich in den späteren Mitteilungen erweisen, wo Verf. neue, allgemeinere (nicht-polytrope) Ansätze sowie rotierende Gasmassen behandeln will. *E. Hölder.*

Soboleff, S.: Sur une classe des équations intégrodifférentielles à plusieurs variables indépendantes. II. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr **1**, 61—88 u. franz. Zusammenfassung 89—90 (1938) [Russisch].

On considère les équations intégrodifférentielles

$$u = f + \mathfrak{L}u, \tag{1}$$

où

$$\mathfrak{L}u = \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqq t^{(1)} \leqq t^{(0)} - r^{(01)}} \sum K_{p_0 \ldots p_n}(M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(1)}, t^{(1)}) \frac{\partial^p u}{\partial t^{(1)p_0} \partial x_1^{(1)p_1} \ldots \partial x_n^{(1)p_n}} dx_1^{(1)} \ldots dx_n^{(1)} dt^{(1)} \tag{2}$$

aux indices

$$\varrho_1 > 0, \quad \varrho_2 = 0. \tag{3}$$

(Voir la 1ère partie de ce mémoire, ce Zbl. 18, 67.) — On suppose que $p \leqq s = \left[\frac{n+1}{2}\right]$. — Pour n impaire on suppose d'ailleurs que chaque noyau $K_{p_0 \ldots p_n}$ pour lequel $p_0 + \cdots + p_n = s$ peut être décomposé en somme

$$K_{p_0 \ldots p_n} = K_{(1)_{p_0 \ldots p_n}} + K_{(2)_{p_0 \ldots p_n}}, \tag{4}$$

où $K_{(1)}$ pour $\eta^{(01)} \geqq \frac{2}{3}$ ne dépend pas de $\eta^{(01)}$

$$\frac{\partial K_{(1)_{p_0 \ldots p_n}}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)}, \xi_0^{(01)}, \eta^{(01)}, \vartheta_1^{(01)}, \ldots \vartheta_{n-2}^{(01)}, \varphi^{(01)})}{\partial \eta^{(01)}} = 0 \qquad \left(\eta^{(01)} \geqq \frac{2}{3}\right) \tag{5}$$

et les noyaux $K_{(2)_{p_0 \ldots p_n}}$, ont les propriétés suivantes: Soit $\overset{*}{\mathfrak{L}}$ l'opération qu'on obtient de $\mathfrak{L}$ en remplaçent chaque $K_{p_0 \ldots p_n}$ par $K_{(1)_{p_0 \ldots p_n}}$, et en effaçant tous les noyaux $K_{p_0 \ldots p_n}$ pour $p_0 + \cdots + p_n < s$. — $\overset{*}{\mathfrak{L}}$ soit dite la partie principale de l'opération $\mathfrak{L}$. Alors les fonctions $K_{(2)_{p_0 \ldots p_n}}$ sont de la sorte que l'opération $\mathfrak{L} - \overset{*}{\mathfrak{L}}$ a l'indice $\varrho_2 > 0$. Pour résoudre l'équation (1) on cherche d'abord l'opération $\mathfrak{G}$ de telle façon que

$$\overset{*}{\mathfrak{G}} = \overset{*}{\mathfrak{L}} + \overset{*}{\mathfrak{L}}\overset{*}{\mathfrak{G}}. \tag{6}$$

— On peut établir que l'équation (6) permet de trouver cette opération $\mathfrak{G}$ au moyen de la résolution d'un système d'équations intégrales. — Si nous cherchons u dans l'aspect

$$u = v + \mathfrak{G}v \tag{7}$$

nous aurons pour v l'équation

$$v + \mathfrak{G}v = f + \mathfrak{L}v + \mathfrak{L}\mathfrak{G}v. \tag{8}$$

— Grâce à (8) cette équation peut être résolue au moyen des approximations successives. — On donne deux examples qui montrent que les équations intégrodifférentielles à l'indice $\varrho_1 = 0$ ou $\varrho_2 < 0$ en générale n'ont pas de solution. *Autoreferat.*

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Banach, S.: Die Theorie der Operationen und ihre Bedeutung für die Analysis. (*Oslo, 14.—18. VII. 1936.*) C. R. congr. int. Math. 1, 261—268 (1937).

An excellent but brief resume of the fundamental concepts, results and applications associated with the theory of (I) linear, polynomial, and analytic operations on spaces of type (*B*) and (II) convex bodies and the fixed point theorem. *N. Dunford.*

Marcinkiewicz, J.: Sur les suites d'opérations linéaires. Studia Math. 7, 52–72 (1938).

Let a linear operation $g = U(f)$ belong to the class $L_{p,q}$ if it transforms every $f \in L_p(0, 1)$ into $g \in L_q(0, 1)$. If in addition U is completely continuous, it is said to belong to $L^*_{p,q}$. The main result of the paper is embodied in the following theorem: If the sequence of norms of the operations $\{U_\nu\}$ of the class $L^*_{p,q}$, $p, q > 1$, is bounded then there exists a sequence of integers $\{n_\nu\}$ such that $\nu^{-1}\sum_{\mu=1}^{\nu} U_{n_\mu}(f)$ converges almost everywhere for each $f \in L_p$. Among other results of the paper we mention the following. If the sequence $\{U_n\}$ of operations $\in L^*_{q,q}$, $q \geqq 2$, converges strongly in L_q then there exists a subsequence $\{U_{n_\nu}\}$ such that $\{U_{n_\nu}(f)\}$ converges almost everywhere for each $f \in L_q$; this result does not hold if $1 < q < 2$. The main tool used is based on properties of Walsh's orthonormal set established by Paley. Some previous works of the author can be easily derived from the results of the present paper. *J. D. Tamarkin.*

Agnew, Ralph Palmer: Linear functionals satisfying prescribed conditions. Duke math. J. 4, 55—77 (1938).

The author discusses the question of the existence of a linear functional defined over a linear space and having a specified set of properties. Let $p(x)$ be a functional having the properties $p(x+y) \leqq p(x) + p(y)$; $p(tx) = tp(x)$ for $t \geqq 0$ and let Ψ be a family of pairs (x, y); then a necessary and sufficient condition for the existence of a linear functional f with $f(x) \leqq p(x)$, $f(x) = f(y)$ for (x, y) in Ψ is that the g.l.b. $p\left[\sum_{k=1}^{n} a_k(y_k - x_k)\right] = 0$, where the g.l.b. is taken over all $n > 0$, a_k real, (x_k, y_k) in Ψ. This theorem is one of a number of similar results. Several applications are given e.g., let E be the space of real bounded functions $x(s)$ $(-\infty < s < \infty)$, then none of the generalized limits of Banach has the additional property $\operatorname{Lim}_{s\to\infty} x(s + (\sin 2\pi s)/12) = \operatorname{Lim}_{s\to\infty} x(s)$ for every x in E. *N. Dunford* (New Haven).

Taylor, A. E.: The resolvent of a closed transformation. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 70—74 (1938).

If T is a closed, distributive transformation on a complex Banach space E with a resolvent set Σ, then Σ is an open set in the complex plane and the resolvent $R_\lambda f$ is an analytic function in Σ whose n-th derivative is $n!\, R_\lambda^{n+1} f$ and whose expansion about λ_0 converges at least in a circle $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|R_{\lambda_0}\|$. In particular if T is continuous, Σ is not the whole complex plane, i.e., the spectrum of T is not empty. *N. Dunford.*

Taylor, Angus E.: On the properties of analytic functions in abstract spaces. Math. Ann. 115, 466—484 (1938).

If E and E' are complex Banach spaces the function f on E to E' is said to be analytic in a domain D if it is continuous there and has a Gateaux differential at each point of D. An equivalent statement is that f is continuous on D and $f(x + \alpha y)$ is analytic in α at $\alpha = 0$ for each x of D and y of E. The members of a family of functions analytic in D are equi-continuous if they are bounded and the limit of a sequence of functions analytic in D and bounded in each region interior to D is also analytic. A function of two variables which is analytic in each separately is analytic in the two together (see also Graves, Bull. Amer. Math. Soc. 41, 653 this Zbl. 13, 25). The explicit meaning of and condition for analyticity is given for complex l_p spaces. *N. Dunford* (New Haven).

Bohnenblust, H. F., and A. Sobczyk: Extensions of functionals on complex linear spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 91—93 (1938).

The Hahn-Banach theorem on the extension of real valued linear functionals is proved for complex linear functionals defined over a complex linear subspace of a normed complex space. It is also shown that in any complex linear space L of infinite dimension, there exists a real linear subspace on which there is a complex linear functional f [i.e., $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$ for a, b complex as long as the equation

does not give rise to elements outside the subspace] which cannot be continuously extended to the entire space L. *N. Dunford* (New Haven).

Hille, Einar: On semi-groups of transformations in Hilbert space. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **24**, 159—161 (1938).

The following theorem is proved. Let $T_\alpha(x)$, $\alpha > 0$ be a family of self-adjoint, positive definite transformations on a Hilbert space $\mathfrak{H}$ to $\mathfrak{H}$, satisfying conditions $T_\alpha(T_\beta(x)) = T_{\alpha+\beta}(x)$ (semi-group property) and $\|T(x)\| \leqq \|x\|$. Then there exists a self-adjoint transformation $A(x)$, positive definite but not necessarily limited, with its resolution of identity $E(\lambda)$, such that $(T_\alpha(x), x) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha\lambda} d_\lambda(E(\lambda)x, x)$. A slightly more general theorem for groups of self-adjoint transformations was proved earlier by B. v. Sz. Nagy (this Zbl. **13**, 56), but was not known to the author whose theorem could also be proved by v. Sz. Nagy's argument. *J. D. Tamarkin.*

Sz. Nagy, Béla de: On the set of positive functions in L_2. Ann. of Math., II. s. **39**, 1—13 (1938).

Let $\alpha(x)$ be a non-decreasing function defined on an interval J (finite or infinite), and L_2 the class of all complex-valued functions $f(x)$ measurable with respect to $\alpha(x)$, for which the Lebesgue-Stieltjes integral $\int\limits_J |f(x)|^2 d\alpha(x) < \infty$. The author discusses a linear and isometric mapping of L_2 onto an abstract Hilbert space $\mathfrak{H}$ and proves the following result. Let $\mathfrak{P}$ be a subset of $\mathfrak{H}$; in order that there exist a linear and isometric map of L_2 onto $\mathfrak{H}$ which carries $\mathfrak{P}$ into the class of all functions $f(x)$ of L_2 such that $f(x) \geqq 0$ it is necessary and sufficient that (I) $(u, v) \geqq 0$ for each pair of elements of $\mathfrak{P}$; (II) $(u, f) \geqq 0$ for a fixed $f \in \mathfrak{H}$ and for all $u \in \mathfrak{P}$ implies $f \in \mathfrak{P}$; (III) if $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathfrak{P}$ and $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$ then there exists elements $w_{ij} \in \mathfrak{P}$ $(i, j = 1, 2)$ such that $u_i = \sum\limits_j w_{ij}$, $v_i = \sum\limits_j w_{ji}$. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Halperin, Israel: Closures and adjoints of linear differential operators. Ann. of Math., II. s. **38**, 880—919 (1937).

The author gives an explicit determination of the closure and adjoint operators defined by a linear differential expression considered as an operator in the Hilbert space of functions which are Lebesgue square summable (abbrev. L.s.s.). We give the details here for the case of an ordinary quasi-differential operator. Let $q_r(x)$, $p_r(x)$, $r = 0, \ldots, n$ be bounded and measurable on the finite or infinite interval (a, b) and $|q_0(x)|$, $|p_n(x)| \geqq \epsilon > 0$. Let D' be the space of all $f(x)$ which are L.s.s. on (a, b) and for which functions $f_{(r)}(x)$, $r = 0, \ldots, n$, exist with $f_{(r)}(x)$ $(r < n)$ absolutely continuous and $f_{(0)}(x) \sim q_0(x) f(x)$, $f_{(r)}(x) \sim f'_{(r-1)}(x) + q_r(x) f(x)$ (the equivalence being in the sense of Lebesgue). Let D'_0 be those $f(x)$ in D' for which $f_{(r)}(a) = f_{(r)}(b) = 0$, $0 \leqq r < n$. The expression $\sum\limits_{n=0}^{n} p_r(x) f_{(r)}(x)$ then defines the quasi-differential operators T', T'_0 on D', D'_0 resp. Let the domains D'', D''_0 and the operators T'', T''_0 be defined in the same way when $q_r(x)$, $p_r(x)$ are replaced by $(-1)^{n-r}\overline{p_{n-r}(x)}$, $(-1)^{n-r}\overline{q_{n-r}(x)}$ resp. Then T', T'_0 are single valued closed operators with domains dense in the Hilbert space of all L.s.s. functions on (a, b). The adjoint operators are T''_0, T'' resp. The chief difficulty in the proof comes in showing that the functions $f_{(r)}(x)$ are L.s.s. *N. Dunford* (New Haven).

Kitagawa, Tosio: The application of the theory of Cauchy's series on the solutions of the operational-difference equation. Tôhoku Math. J. **44**, 139—161 (1937).

An analogue of the theorem of Bochner-von Neumann (this Zbl. **11**, 20) on the almost periodic character of compact solutions of an operational differential equation is given for the equation $\sum\limits_{j=0}^{n} A_j \varphi_{t+j} = 0$ where A_j $(j = 0, \ldots, n)$ is a closed operator on Hilbert space and $\varphi_t(-\infty < t < \infty)$ is a point of Hilbert space. *Dunford.*

Michal, Aristotle D., and Donald H. Hyers: Theory and applications of abstract normal coordinates in a general differential geometry. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 7, 157—175 (1938).

By means of a theorem on the differentiability of the solutions of a second order differential equation with a one point boundary condition, normal coordinates are introduced into an abstract differential geometry with a linear connection and used to exhibit a fundamental set of differential invariants of a contravariant or scalar type. The generalization to differential invariants of a mixed type has been given by the same authors (this Zbl. 17, 425). *N. Dunford* (New Haven).

Variationsrechnung:

Rapoport, J.: Problème inverse du calcul des variations. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 4, 105—121 u. franz. Zusammenfassung 122 (1938) [Ukrainisch].

In diesem (ersten) Teile der Arbeit wird eine Art inverses Problem der Variationsrechnung im engen Sinne gelöst. In einem $(n+1)$-dimensionalen Raume $(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$ wird die Gesamtheit der Kurven, die zwei feste Punkte A und B verbinden, betrachtet. Es wird ein Funktional dieser Kurven von der in der Variationsrechnung üblichen Form gesucht, so daß die Eulerschen Gleichungen für das Extremum dieses Funktionals mit den vorgegebenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zusammenfallen. Der Verf. stellt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines solchen Funktionals auf. Die unter dem Integralzeichen dieses Funktionals auftretende Funktion kann mittels einer einzigen Quadratur bestimmt werden. Dann folgt eine Anwendung auf ein mechanisches System von n materiellen Punkten. — Eine analoge Problemstellung und Lösung wird für den Fall eines vielfachen Integrals mit einer unbekannten Funktion von mehreren Variablen einerseits und einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung andererseits durchgeführt. Als Anwendung betrachtet der Verf. die Wellengleichung. — Der Schluß wird folgen. — Vgl. auch dies. Zbl. 18, 220. *Kerner* (Warszawa).

Kimball, W. S.: Differentiation of line integrals by parallel displacement. Philos. Mag., VII. s. 25, 1—45 (1938).

This paper is concerned with the differentiation of a line integral with respect to the path of integration, the totality of paths consisting of those obtained by parallel displacement of a given path. In the first part, the author obtains a heuristic result by differentiation of the finite sum which approximates the line integral and then passing to the limit. In the second part the same results are obtained by a direct process, thus providing a justification for them. It does not seem clear however that the procedure in the second part is entirely independent of the formulae established in the first part. The third part sets up formal rules for the processes that have been employed. Differentiation "with respect to differentials" does not receive a sufficiently clear interpretation. *Arnold Dresden* (Swarthmore).

Kimball, W. S.: Application of derivatives of line integrals. Philos. Mag., VII. s. 25, 549—567 (1938).

In this paper the author works out a number of examples to illustrate the use of the formulae for the differentiation of line integrals developed in a previous paper (see the prec. rev.). Statements to the effect that "a part of a line integral . . . will ordinarily have its extremum values when its derivatives vanish", and that "like the second derivatives of an elementary function the first two of the second derivatives . . . are minus or plus ordinarily when the integral is a relative maximum or minimum respectively" bring out the rather formal character of the work. The consideration of the "characteristic patterns" of some line integrals of the form $\int M\,dx + N\,dy$, consisting of the "extremal arcs", i. e. the curves for which $N_x - M_y = 0$, and the "null lines", i.e. the solutions of the equation $M\,dx + N\,dy = 0$, gives rise to some interesting results. *Arnold Dresden* (Swarthmore).

Funktionentheorie:

Gravé, D.: De la fonction exponentielle générale. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 4, 43—45 u. franz. Zusammenfassung 45 (1938) [Ukrainisch].

Cremer, Hubert: Über die Häufigkeit der Nichtzentren. Math. Ann. **115**, 573—580 (1938).

Étant donnée une fonction régulière à l'origine: $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ où $|a_1|$ est différent de 0 et de 1, on sait qu'il existe une fonction $S(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$ avec $c_1 \neq 0$, telle que $f(z) \equiv S^{-1}[a_1 S(z)]$. L'origine est alors par définition un „centre" pour $f(z)$. L'hypothèse $|a_1| \neq 1$ est nécessaire pour qu'il en soit ainsi. Le but de ce mémoire est d'étudier ce qui ce passe lorsque $|a_1| = 1$, en particulier de voir si les fonctions pour lesquelles l'origine n'est pas un centre constituent l'exception on le cas général. Pour donner une idée des résultats obtenus par l'auteur, disons par exemple que dans certaines classes de fonctions $f(z)$, qu'il serait trop long de préciser ici, l'ensemble de celles pour lesquelles l'origine n'est pas un centre possède la puissance du continu. *E. Blanc* (Toulon).

Ostrowski, Alexandre: Sur les modules des zéros des fonctions entières. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1541—1543 (1938).

Soit $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, $a_0 \neq 0$, une fonction entière, $x_1, x_2, \ldots$ ses zéros rangés dans l'ordre des modules non décroissants, R_n le rapport rectifié de rang n des coefficients, défini à partir du polygone de Newton d'Hadamard [voir Hadamard, J. Math. pures appl. 4, 9 (1893)]. L'aut. montre que, pour chaque p, si $f(z)$ possède au moins p racines et si $|x_p| < R_p$, on a

$$\prod_{n=1}^{p}\left(1 - \frac{|x_n|}{R_p}\right) < \frac{1}{2}, \qquad |x_p| > \left(1 - 2^{-\frac{1}{p}}\right) R_p,$$

ces inégalités étant, pour chaque p, les meilleures possibles. Ce résultat s'étend au cas où la série définissant $f(z)$ a un rayon de convergence fini et où les x_n sont les zéros intérieurs au cercle de convergence. *G. Valiron* (Paris).

Ganapathy Iyer, V.: The behaviour of integral functions at the lattice-points. J. London Math. Soc. **13**, 91—94 (1938).

Par la méthode utilisée dans un mémoire précédent (voir ce Zbl. **15**, 164) l'aut. démontre cette proposition: Si $f(z)$ est une fonction entière,

$$M(r,f) = \max |f(re^{i\varphi})|, \text{ et si } \overline{\lim_{|m+in|=\infty}} \frac{\log f(m+in)}{m^2+n^2} \leqq \alpha < \frac{\pi}{2},\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad (*)$$

ainsi que

$$\underline{\lim_{r=\infty}} \frac{1}{r}\left[\log M(r,f) - \frac{\pi r^2}{2}\right] = -\infty, \quad (**)$$

on a

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r,f)}{r^2} \leqq \alpha, \quad (***)$$

le signe = valant simultanément dans (*) et (***). Il s'ensuit notamment que, si (**) a lieu et si $|f(m+in)|$ reste borné, $f(z)$ est constant. Ce dernier résultat contient celui donné précédemment par l'aut. et une généralisation de Pfluger (voir ce Zbl. **15**, 308). *G. Valiron* (Paris).

Ganapathy Iyer, V.: A correction to the paper „On effective sets of points in relation to integral functions". Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 494 (1938).

L'aut. corrige l'erreur du mémoire cité dans le titre, qui avait été relevée dans le compte rendu donné dans ce Zbl. **17**, 314. *G. Valiron* (Paris).

Lee, Kwok-Ping: Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre infini. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1548—1550 (1938).

L'aut. montre que la proposition donnée par Valiron (voir ce Zbl. **18**, 73) s'étend au cas où on remplace dans l'énoncé le nombre $n(r, \varphi_0, \varepsilon, b)$ des zéros de $f(z) - b$

dans le secteur $|\varphi - \varphi_0| < \varepsilon$, $|z| < r$, par le nombre $n(r, \varphi_0, \varepsilon, g)$ des zéros de $f(z) - g(z)$ dans ce même secteur, $g(z)$ étant une constante ou une fraction rationnelle ou une fonction méromorphe telle que $T(r, g) < U(r)^\delta$ pour $0 < \delta < 1$ et $r > r(g)$. $k(\varphi_0, b)$ est alors remplacé par $k(\varphi_0, g)$; pour chaque φ_0, ce nombre $k(\varphi_0, g)$ a la même valeur quelle que soit g, sauf pour deux fonctions g au plus. *G. Valiron* (Paris).

Blanc, Charles: Une décomposition du problème du type des surfaces de Riemann. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1078—1080 (1938).

Verf. hat früher den Einfluß von Symmetrie oder Asymmetrie auf den Typus einer Riemannschen Fläche untersucht. Es wird jetzt eine gegebene Fläche in zwei Halbflächen zerlegt, die wieder vom parabolischen oder hyperbolischen Typus sein können. Verf. betont, daß das allgemeine Typenproblem in zwei Teile zerlegt werden kann: I. Den Typus einer gegebenen Halbfläche zu bestimmen. II. Den Typus einer ganzen Fläche zu bestimmen, die aus zwei parabolischen Halbflächen besteht. — Für Halbflächen von genügend regulärem Aufbau wird noch eine metrische Eigenschaft bewiesen, die zu einer Vereinfachung des Typenproblems leiten kann. *Ahlfors.*

Speiser, A.: Riemannsche Flächen vom hyperbolischen Typus. Comment. math. helv. **10**, 232—242 (1938).

Man betrachte eine einfach zusammenh. R. Fl., die bei ∞ in allen Blättern logarithmisch verzweigt ist und die sonst nur über den Stellen ± 1 logarithmische Windungspunkte aufweist. Kennt man die linearen Substitutionen, die zu der durch diese Fläche bestimmten Untergruppe der modularen Gruppe gehören, so läßt sich bekanntlich ein genaues Kriterium für den Typus der Fläche aufstellen. Die Fläche werde nun längs einer Verbindungsgeraden zwischen zwei Windungspunkten in die Hälften A und B zerlegt. Durch Spiegelung erhält man die Halbflächen $\bar{A}$ und $\bar{B}$. Wenn $A + \bar{A}$ und $B + \bar{B}$ hyperbolisch sind, dann ist auch $A + B$ hyperbolisch (rein hyp. Typus). Wenn dagegen $A + \bar{A}$ und $B + \bar{B}$ parabolisch sind und $A + B$ trotzdem hyperbolisch ausfällt, so spricht man von dem gemischt hyperbolischen Typus. — Verf. findet als hinreichende Bedingung für den rein hyperbolischen Fall die Konvergenz der Reihe $\sum 1/|cd|$ $\left[\text{die Substitutionen der Untergruppe sind } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]$, erstreckt über diejenigen Matrizen, für welche a/c in einem beliebigen endlichen Intervall enthalten ist. — Die Abhandlung endet mit einigen Bemerkungen über quasikonforme Abbildungen. *Ahlfors* (Helsingfors).

Koebe, Paul: Iterationstheorie der niederen Uniformisierungsgrößen. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig **89**, 173—204 (1937).

Eine niedere Uniformisierungsgröße ist eine solche Funktion, deren Riemannsche Fläche nur endlich viele Verzweigungspunkte hat und sich bei Vertauschungen der Blätter nicht ändert, und die selbst jeden Wert eines einfach zusammenhängenden schlichten Bereiches nur einmal annimmt. Folgende Verzweigungssignaturen sind zu betrachten: (l, l), $(2, 2, l)$ mit endlichem l, $(2, 3, 3)$ $(2, 3, 4)$ $(2, 3, 5)$; (∞, ∞) $(2, 2, \infty)$, $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$, $(3, 3, 3)$, $(2, 2, 2, 2)$. $(2, 3, 5)$ wird zurückgestellt, da die zugehörige Gruppe nicht auflösbar ist. Die zu (l, l) gehörigen Funktionen nennt Verf. Fundamentaltransformationen. Die Typen $(2, 2, l)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ lassen sich durch endliche Ketten iterierter Fundamentaltransformationen darstellen; (∞, ∞) $(2, 2, \infty)$, die auf Logarithmen führen, und $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$ $(3, 3, 3)$ $(2, 2, 2, 2)$, die auf elliptische Integrale erster Gattung führen, durch konvergente unendliche Ketten geeignet normierter Fundamentaltransformationen. So löst Verf. beispielsweise im Falle $(2, 2, 2, 2)$ zwei von diesen Verzweigungspunkten durch eine Fundamentaltransformation vom Index 2 auf; dadurch werden aber aus den zwei übrigen wieder vier, von denen er wieder zwei auflöst usf. Die Konvergenz des Verfahrens gegen ein elliptisches Integral 1. Gattung wird nachgewiesen. *Ott-Heinrich Keller* (Berlin).

Wachs, Silvain: Sur quelques propriétés des transformations pseudo-conformes avec un point frontière invariant. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1352—1354 (1938).

Mit Hilfe der Kernfunktion und der Metrik von Stefan Bergmann (s. dies. Zbl. **6**, 66 u. **10**, 309) wird in einer Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ das Verhalten einer analytischen Abbildung des vierdimensionalen w, z-Raumes untersucht, die einen gegebenen Bereich $\mathfrak{B}$ so auf einen Teil von sich abbildet, daß dabei der Randpunkt P fest bleibt. Es werden Abschätzungen angegeben. Im Sonderfalle s. auch A. Miniatoff (dies. Zbl. **11**, 31). *Behnke* (Münster i. W.).

Geometrie.

● **Bottema, O.: Die elementare Geometrie der Ebene.** Groningen u. Batavia: P. Noordhoff 1938. XII, 328 S. u. 131 Abb. Fl. 6.50. [Holländisch.]

The author explains in the preface of his book that he has tried to discuss elementary plane geometry by means of a complete axiomatical foundation without any appeal to visualisation, without neglecting at the same time a number of detail questions and applications. This involves, in the author's treatment, a thorough discussion of affine geometry, after which metrical properties are introduced by restriction of the transformation group. A full axiomatics of projective geometry has been consciously rejected, because the number of projective theorems in elementary geometry is small and the projective plane differs essentially from the affine and euclidean plane. The axiomatics of projective geometry has, however, influenced the selection of the axioms used. — Chapter I, Foundations, introduces points and straight lines and their incidence relations without further definition, and proceeds to introduce the following axioms: I. Two different points can be connected by one and only one straight line. II. The parallel axiom. III (Pascal). If a hexagon is inscribed in a pair of straight lines and two pairs of opposite sides are parallel, then also the third pair is parallel. IV. a) There are at least three points which are not on a straight line. b) On every straight line is at least one point. — V. (Fano) The diagonals of a parallelogram intersect. — Chapter II brings transformation groups, especially translations, homothetic transformations, affinities and point triplets on a straight line. — Chapter III gives operations with triplets, addition, multiplication, and inverse operations, which allow the introduction of the number concept. Length of a line segment can now be defined, and ratio of lengths. — Chapter IV gives properties of polygons, theorems of Menelaus, De Ceva, Desargues, and centers of gravity. — Chapter V introduces the area of a polygon. — Chapter VI, on properties of affinities, defines a. o. the cosine of an affinity. — Chapter VII deals with linear affine constructions. The fundamental constructions are: A. To construct a point belonging or not belonging to a given figure. B. To determine the line connecting two points, the point of intersection of two lines, to construct through a point a line parallel to a given one. — Chapter VIII discusses the ellipse with the aid of the axiom: VI. Every straight line through the center of the ellipse has two (different) points in common with the ellipse. — Chapter IX is on the notion of order. It brings the definition of between, of points inside a triangle, of points on different sides of a line, and leads up to convexity. — Chapter X is a discussion of quadratic affine constructions. The fundamental constructions are: C. It is possible to construct one single ellipse E, of which the center M and the intersections with every line through M can be constructed. This leads to the construction of affinely regular polygons and the regular polygon of 17 sides. Fundamental construction D is: D. It is possible to find the points of intersection of a straight line with E, if they exist. With postulates A, B, C, D it is possible to construct the roots of every quadratic equation which has roots. — Chapter XI brings metrical properties. A definite ellipse C_0 is singled out. The name circle is given to all ellipses which result from C_0 by a homothetic transformation. This allows definition of perpendicularity, similarity, congruence and other metrical conceptions. — Chapter XII deals with metrical constructions. For this new fundamental constructions are necessary: E. It is possible to construct a pentagon in a circle. F. It is possible to construct a single circle C_0, its center M_0, its points of intersection with any line through M_0 and the points of intersection with an arbitrary line, when they exist. Three other fundamental constructions give postulates for metrical constructions with particular instruments. This allows discussion of Mascheroni's constructions. — Chapter XIII adds a new axioma: VII. (Axiom of order) If a point of line AB does not coincide with A or B and does not lie inside of AB, then it lies outside of AB. This allows renewed discussion of distance, the introduction of half rays and half planes, and of the conception of angle. A set of construction postulates deal with half rays, line segments and circular arcs. The book ends with a series of suggestions about further axioms, which can complete the given set of seven axioms. The book is not only a textbook of plane geometry for more advanced students, but is an important addition to the literature on foundations of geometry. *Struik.*

Mahrenholz, J.: Bibliographische Notizen zu K. Lorenz: Ein Dreieckssatz. Deutsche Math. **3**, 272—274 (1938).

Vgl. dies. Zbl. **17**, 369.

Egervarý, Eugen: Über das Tetraeder mit Höhenschnittpunkt. Mat. fiz. Lap. **45**, 18—34 u. deutsch. Zusammenfassung 34—35 (1938) [Ungarisch].

Delens, P.: Tétraèdres et sphères de Roberts. Mathesis 52, Nr 5, Suppl., 155—164 (1938).

Venkatachaliengar, K.: On a problem of the tetrahedron. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **7**, 257—260 (1938).

On the problem (raised by Narasinga Rao) of the existence and the bounds of the volume of a tetrahedron the areas of whose faces are given. If Δ_i are the areas and $\Delta_1 \leqq \Delta_2 \leqq \Delta_3 \leqq \Delta_4$, the author proves that the necessary and sufficient condition for the existence of tetrahedra is that

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 > \Delta_4.$$

The lower bound of the volume is found to be zero; the author gives the inequality

$$V^2 \leqq \tfrac{2}{9} \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$$

and proves the theorem: The tetrahedron of maximum volume is an orthogonal one. Generalisations to higher dimensions. The author uses geometrical methods.

O. Bottema (Deventer, Holl.).

Iyengar, K. S. K.: A note on Narasinga Rao's problem relating to tetrahedra. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **7**, 269—278 (1938).

Cf. the prec. rev. The authors investigation is an analytical one, more detailed and more elaborate. He shows (at least for three dimensions) that the orthogonal tetrahedron the areas of whose faces are given (and which has maximum volume) is unique. The following inequality and its generalisation for higher dimensions is proved:

$$V^2 \leqq \frac{2}{9} \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \left[1 - \frac{\Omega^3}{3(\Delta_1^2 \Delta_2^2 + \Delta_2^2 \Delta_3^2 + \Delta_3^2 \Delta_1^2)}\right]^2,$$

where $2\Omega = \Delta_4^2 - \Delta_1^2 - \Delta_2^2 - \Delta_3^2$. *O. Bottema* (Deventer, Holl.).

Auluck, Faqir Chand: The volume of a tetrahedron, the areas of the faces being given. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **7**, 279—281 (1938).

On Narasinga Rao's problem (cf. the prec. rev.). The author determines stationary values of the volume and proves that it has an upper bound; the lower bound is zero.

O. Bottema (Deventer, Holl.).

Mack, K.: Eine mit dem vollständigen Vierseit zusammenhängende Schließungsaufgabe. Čas. mat. fys. **67**, 199—202 (1938).

Es handelt sich um die Parallelogramme, die einem (unvollständigen) Viereck in Zentralkollineationen mit vorgegebenem Zentrum entsprechen. Räumliche Deutung als Parallelogrammschnitte eines Vierkants. *Anton E. Mayer* (Wien).

Adati, Tyūzi: The application of complex number to geometry. I. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **20**, 245—266 (1938).

The author makes use of the representation of a point on the plane by the conjugate complex numbers $z, \bar{z}$ as it has been done by Morley. This first part of his paper is devoted to problems connected with Poncelet's polygons. After having given a proof of Poncelet's theorem, he shows some properties of the diagonals of the polygon. We cite the following main theorem: diagonals $A_i A_{i+p}$ of a polygon $A_1 A_2 \ldots A_n$, which is circumscribed in a circle and circumscribed about another circle, are tangent to a third circle; the centres of the three circles lie on a straight line. And the special case: $n = 2m$, $p = m$, the diagonals passing through a fixed point. *O. Bottema.*

Yanagihara, Kitizi: On the construction problems by means of a ruler and one or two circles with unknown centres. Tôhoku Math. J. **44**, 322—323 (1938).

Elementary proof of the theorem of Hilbert-Cauer: When two circles with unknown centres are given on a plane π, neither concentric nor intersecting in two

points distinct or coincident, we can not find their centres by only drawing a finite number of straight lines on π. *O. Bottema* (Deventer, Holl.).

Meincke, H., und Günther Schulz: Eine Näherungskonstruktion für die logarithmische Spirale. Deutsche Math. 3, 269—272 (1938).

Turrière, Émile: Sur les courbes de transition dans les virages. An. Fac. Ci. Pôrto **23**, 19—32 (1938).

Notes historiques et bibliographiques sur quelques courbes de transition dans les raccordements progressifs: La parabole cubique, la courbe élastique, la lemniscate de Bernoulli, la clothoïde, la bisinusoïde, la radioïde pseudo-elliptique.

O. Bottema (Deventer, Holl.).

Schilling, Friedrich: Raumkurven auf rektifizierenden Zylindern. Deutsche Math. **3**, 241—254 (1938).

Roever, W. H.: Analytic treatment of perspection with bearing on picturization. Amer. Math. Monthly **45**, 278—293 (1938).

Hancock, Harris: The densest position of homologous bodies. Science, New York **87**, 320—322 (1938).

Eine biologische Beobachtung, daß 1. locker aggregierte Zellen usw. 14-Flächner und 2. unter Druck komprimierte Zellen usw. 12-Flächner formen, wird, ohne vom mathematischen Standpunkte aus wesentlich Neues zu bringen, plausibel erklärt.

Laves (Göttingen).

Strubecker, Karl: Studysches Übertragungsprinzip und Motorrechnung. Math. Z. **44**, 1—19 (1938).

Es wird gezeigt, daß sich die elementare Motorrechnung leicht und übersichtlich mit Hilfe des berühmten Studyschen Übertragungsprinzips (der Raumkinematik oder Raumstatik auf die Kinematik bzw. Statik eines Bündels dualkomplexer Vektoren) aufbauen läßt. Zu diesem Zweck wird eine drei Forderungen erfüllende eineindeutige Zuordnung zwischen den Vektoren des dualen Bündels und den Motoren des Raumes aufgestellt. Die Teilvektoren M und $\bar{M}$ eines dualen Vektors $M + \varepsilon \bar{M}$ sind dabei zugleich Resultant- bzw. Momentvektor des zugeordneten (Kraft-) Motors. Danach lassen sich die elementaren Operationen der Vektorrechnung des dualen Bündels unmittelbar auf die elementaren Prozesse der Motorrechnung übertragen. Das innere oder äußere Produkt zweier dualer Vektoren geht z. B. im wesentlichen in das skalare bzw. motorische Produkt der entsprechenden Motoren über, wobei die Invarianz dieser Produktbildungen auf Grund des Studyschen Übertragungsprinzips unmittelbar einleuchtet. Schließlich werden einige Anwendungsbeispiele behandelt und das räumliche Analogon zum Satz von der Culmannschen Geraden abgeleitet. *J. L. Krames.*

Weyssenhoff, Jan von: Duale Größen, Großrotation, Großdivergenz und die Stokes-Gaußschen Sätze in allgemeinen Räumen. Ann. Soc. Polon. math. **16**, 127—144 (1938).

Es werden die Stokes-Gaußschen Sätze in allgemeinen n-dimensionalen Räumen bewiesen. Dazu wird zuerst die duale Zuordnung von kovarianten p-Vektoren zu kontravarianten $(n-p)$-Vektordichten (vom Gewicht $+1$) sowie von kontravarianten p-Vektoren zu kovarianten $(n-p)$-Vektorvolumina (Dichten vom Gewicht -1) definiert. Diese Zuordnungsregeln weichen von den Schouten-Struikschen etwas ab.

J. Haantjes (Delft).

Tummers, J. H.: Einige Sätze über Kegelschnitte. Mathematica, Zutphen B **7**, 8—10 (1938) [Holländisch].

Ist ABC ein gegebenes Dreieck und P ein willkürlicher Punkt, dann schneiden die Geraden, welche in P auf PA, PB und PC senkrecht stehen, die Seiten BC, CA und AB in den Punkten einer Geraden Δ_P. Verf. zeigt: Liegt P auf dem Mongeschen Kreis eines Kegelschnitts K, dann ist Δ_P eine Tangente von K. Sonderfälle. Konstruktionsaufgaben. *O. Bottema* (Deventer, Holl.).

Kommerell, Karl: Der Grenzkegelschnitt in der Theorie der ebenen bestimmten Fachwerke. Deutsche Math. 3, 284—287 (1938).

Der Grenzkegelschnitt in der Theorie der ebenen Fachwerke ist durch folgende Erzeugungsweise definiert. Gegeben sind die Punkte A, B, C, A_1, B_1, C_1; gesucht werden die Punktepaare O, O_1 derart, daß AO und A_1O_1, BO und B_1O_1, CO und C_1O_1 parallel sind; der Ort der Punkte O ist der Grenzkegelschnitt K. Verf. gibt eine einfache Konstruktion an, wobei zwölf Punkte, die Tangenten in sechs von ihnen, der Mittelpunkt und die Achsen bestimmt werden. Er zeigt, daß die von O und O_1 beschriebenen Kegelschnitte homothetisch sind. Der Kegelschnitt K geht durch A, B und C; auf K kann man — und zwar auf unendlich viele Arten — drei Punkte α, β, γ bestimmen mit der folgenden Eigenschaft: Zieht man durch A und α zwei beliebige Parallelsehnen AO und $\alpha\omega$, so sind BO und $\beta\omega$ und ebenso CO und $\gamma\omega$ parallel.

O. Bottema (Deventer, Holl.).

Differentialgeometrie:

Misès, R. de: L'élément infinitésimal d'ordre *n* d'une courbe gauche. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1338—1340 (1938).

Das Linienelement n-ter Ordnung einer ebenen Kurve ist bestimmt durch die Tangente und die Krümmungsmittelpunkte der Kurve und von $(n-2)$ sukzessiven Evoluten, also einen n-seitigen rechtwinkligen Streckenzug (für dessen Seiten gilt $\varrho_{\nu+1} = \varrho\, d\varrho_\nu/ds$). Die Konstruktion läßt sich eindeutig auch auf Raumkurven übertragen, doch wird das Linienelement dadurch nicht bestimmt. Zur Bestimmung genügt es aber, das entsprechende Polygon zu betrachten auch noch für die Kurve, welche entsteht, wenn man die Tangentenfläche der Kurve auf deren Schmiegebene abwickelt.

W. Feller (Stockholm).

Carrus, S.: Développées successives d'une courbe gauche. J. École polytechn., III. s. **144**, 167—176 (1938).

Es sei C_0 eine beliebige Raumkurve und C_1 eine Evolute. C_1 ist im allgemeinen wieder eine Raumkurve, für die man die Evoluten C_2 (Evoluten 2. Ordnung) suchen kann. Die Fortsetzung dieses Verfahrens liefert die sukzessiven Evoluten jeder beliebigen Ordnung; insbesondere hängen die Evoluten n-ter Ordnung von n Konstanten ab. Die differentialgeometrische Untersuchung der sukzessiven Evoluten einer Raumkurve und die Gewinnung formelmäßiger Ausdrücke für ihre Bogenlängen, Krümmungen und Torsionen im Sinne und mit Methoden einer früheren Arbeit des Verf. (vgl. dies. Zbl. **16**, 274) sind die Gegenstände dieser Note.

Steck (München).

Goormaghtigh, R.: Sur les centres de courbure successifs de la chaînette d'égale résistance. Mathesis **52**, 132—135 (1938).

Cotton, Émile: Sur le pivotement et le contact des surfaces. J. Math. pures appl., IX. s. **17**, 169—178 (1938).

Untersuchungen über solche Bewegungen zweier Flächen, bei denen sie sich stets berühren, aber weder aufeinander abrollen noch gleiten. Beispiele, allgemeine Differentialgleichungen, Zusammenhang mit der Frage, ob die beiden Flächen so orientiert werden können, daß der Berührungspunkt isolierter Punkt der Schnittfigur ist.

Lochs (Kennelbach).

● **Levi-Civita, M.: La trigonométrie des petits triangles curvilignes sur une surface.** Paris: Gauthier-Villars 1938. 34 pag.

Un triangle curviligne (tracé en sur une surface) est dit petit si le produit ΓL reste au-dessous d'une certaine fraction propre, Γ étant le maximum de la courbure des côtés, L la longueur maximum des côtés. De plus, on suppose que le produit GL^2 soit du second ordre par rapport à ΓL, si G désigne le maximum de la courbure totale de la surface à l'intérieur du triangle. L'auteur commence par des triangles d'arcs de cercle dans le plan, pour passer aux courbes quelconques (exprimées en coordonnées canoniques). Ensuite il étudie le triangle des cordes géodésiques d'où suit — en seconde

approximation — la trigonométrie sphérique (ordinaire ou lobatchewskienne) et enfin (au même ordre d'approximation) la trigonométrie des triangles curvilignes. Le point principal est la relation entre la longueur d'un petit arc et sa corde et la possibilité d'envisager la surface (au troisième ordre près) comme une variété à courbure constante aux environs d'un quelconque de ses points. C'est de là que découle la possibilité de remplacer les formules de la trigonométrie ordinaire par les formules en question. — Quant aux détails, il faut renvoyer le lecteur au travail lui-même. *Hlavatý.*

Efimoff, N.: Sur les réseaux géodésiques sur une surface à liaison affine. Rec. math. Moscou **3**, 191—198 u. franz. Zusammenfassung 198—199 (1938) [Russisch].

L'auteur donne le calcul et le démonstration complète des théorèmes énoncés dans deux Notes écrites par lui même et par M. Dubnov [C. R. Acad. Sci. URSS **4**, 43 (1936); **15**, 415 (1937); ce Zbl. **17**, 88, 187]. *S. Finikoff* (Moscou).

Masloff, A. Th.: Le cas limite du théorème de la permutabilité dans la transformation de Bianchi. Rec. math. Moscou **3**, 209—218 u. franz. Zusammenfassung 218 (1938) [Russisch].

Soit S une surface rapportée à ses asymptotiques u, v et déterminée à l'aide de formules de Lelieuvre par trois solution θ_i d'une équation de Moutard $\theta_{uv} = M\theta$ (*), $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$ deux surfaces transformées de Moutard de S à l'aide de solutions $w = f(u,v,a)$, $w' = f(u, v, a')$ de (*), S^* la quatrième surface du théorème de permutabilité de Bianchi. L'auteur examine le cas limite $a' \to a$ et démontre que, $\mathfrak{S}'$ coïncidant avec $\mathfrak{S}$, S^* est bien déterminée et dépend de w et $\frac{\partial w}{\partial a}$. Si S et $\mathfrak{S}$ sont des surfaces de Bianchi à courbure $K = -[\varphi(u) + \psi(v)]^{-2}$, S^* l'est également, d'où la transformation des surfaces de Bianchi avec 3 constantes arbitraires. L'auteur applique sa transformation à la surface dégénérée en l'axe de z et obtient ∞^3 surfaces de Bianchi. *S. Finikoff.*

Salini, U.: Sopra un fascio di quadriche definito in un punto di una superficie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **27**, 19—22 (1938).

Soir C_1, C_2 deux complexes linéaires osculateurs aux asymptotiques u, v d'une surface non a reglée S, Φ les quadriques du faisceau principale au point P de S (Bompiani, ce Zbl. **3**, 412), r_1, r_2 les droites (non situées dans le plan tangent de S) d'intersection avec C_1 resp. C_2 de la demiquadrique d'un Φ qui passe par la tangente asymptotique u, A, B les points où r_1, r_2 la coupent. La quadrique Φ variant dans le faisceau, r_1, r_2 décrivent deux faisceaux aux centres A, B et plans π_1, π_2. En remplacant u par v, on obtient r_1', r_2' qui décrivent les faisceaux aux centres A', B' et plans π_1', π_2'. Cela posé, la droite $S_2 \equiv AA'$ est le second arête de Green, $S_1 \equiv (\pi_1, \pi_2')$ le premier. Si t_1, t_2 sont les tangentes canoniques à P, d_1, d_2 les directrices de Wilczynski, $l_2 \equiv BB'$ et $l_1 \equiv (\pi_2, \pi_2')$, on a $(l_2 t_2 s_2 d_2) = -1$, $(s_1 d_1 l_1 t_1) = 3$. L'auteur considère les quadriques qui passent par les tangentes asymptotiques u, v par rapport aux quelles s_1, s_2 ou bien d_1, d_2 sont polaire-réciproques etc. *S. Finikoff* (Moscou).

Pantazi, Al.: Sur une propriété projective différentielle caractéristique à la surface de Veronese. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **39**, 43—55 (1937).

Durch Rechnung wird bewiesen: Gibt es auf einer 2dimensionalen Fläche eines R_5 fünf Scharen von ∞^1 Kurven mit festem berührendem R_4, so daß die aus den Tangenten an die fünf durch einen Punkt gehenden Kurven gebildete Figur projektiv invariant ist, so ist die Fläche eine Veronesesche Fläche. Jede Kurvenschar besteht aus den Kegelschnitten der Fläche, die durch einen festen Punkt gehen, und diese fünf Punkte liegen ebenfalls auf einem Kegelschnitt der Fläche. *Lochs* (Kennelbach).

Godeaux, Lucien: Sur une configuration formée par deux suites de Laplace. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **24**, 213—222 (1938).

Soit (x) une surface dont les quatre nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie Φ correspondent entre elles par leurs asymptotiques. Soient U, V les points de l'hyperquadrique Q de S_5 qui représentent les tangentes asymptotiques u, v de (x). La congruence UV donne naissance à la suite de Laplace $\ldots U_1, U, V, V_1, V_2, \ldots$

autopolaire par rapport à Q. Si C_1, C_2 et D_1, D_2 sont les points de rencontre de $V_1 V_2$ on $U_1 U_2$ avec Q, les droites $C_i D_k$ $(i, k = 1, 2)$ représentent les faisceaux des tangentes à Φ aux points caractéristiques. Les tangentes aux lignes u, respectivement v de C_1, C_2, D_1, D_2 concourent en un même point A, respectivement B d'où dérive la suite $\ldots A_1, A, B, B_1, B_2, \ldots$ Chaque plan $V_{n-1} V_n V_{n+1}$ contient les points B_{n-2}, B_{n+2}. Le point A_n a pour hyperplan polaire par rapport à Q l'hyperplan $V_{n-3} V_{n-2} V_{n-1} V_{n+1} V_{n+2} V_{n+3}$. *S. Finikoff* (Moscou).

Bogdan, C. P.: Sopra una classe de V_3 che ammettono una infinità di superficie quasi-asintotiche dipendente da una funzione arbitraria. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **27**, 62—65 (1938).

Une surface F_2^9 est quasi-asymptotique $\sigma_{1,2}$ de V_3 si S_5 osculateur de F_2^9 contient S_3 tangent au point considéré à V_3. L'auteur examine F_2^9 de S_9 qui représente les cubiques planes. Si A est un point fixe de F_2^9 et P le point variable, S_5 oculateur de F_2^9 à P coupe le plan tangent en A au point Q. La droite PQ, P variant, décrit V_3 reglé qui contient F_2^9 comme surface quasi-asymptotique $\sigma_{1,2}$. Ce V_3 admet ∞ surfaces quasi-asymptotiques parmi lesquelles il existe ∞^3 surfaces F_2^9 qui passent par A ayant le même espace osculateur et changent leur place par une homographie. Généralisation pour $F_2^{n^2}$ qui représentent C^n planes. *S. Finikoff* (Moscou).

Hamid, Husni: Sur l'hypercongruence de l'espace euclidien à $n+1$ dimensions. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1340—1342 (1938.)

Einige Elementarformeln aus der Theorie der Geradenkongruenz, welche in üblicher Weise mittels einer Hyperfläche im R_n gegeben wird. *Hlavatý* (Praha).

Urban, A.: Le complexe de normales de V_2 dans V_4. Publ. Fac. Sci. Univ. Charles Prague Nr **154**, 28—32 (1937).

Untersuchung der Normalenkongruenz einer V_2 in V_4, welche hauptsächlich die Verallgemeinerung der klassischen Resultate für R_4 darstellt. Auszug aus Dissertation. *Hlavatý* (Praha).

● **Weatherburn, C. E.: An introduction to Riemannian geometry and the tensor calculus.** Cambridge: Univ. press 1938. X, 191 pag. bound 12/6.

This book may be thought of as a very good elementary introduction to the well known book by Eisenhart (Riemannian Geometry. University Press, Princeton 1926), where more complicated problems are treated. The author confines himself to questions which do not require very much of geometrical intuition but, on the other hand, all subjects are treated very clearly. Contents: I. Some preliminaries. II. Coordinates. Vectors. Tensors. III. Riemannian metric. IV. Christoffel's three-index symbols. Covariant differentiation. V. Curvature of a curve. Geodesics. Parallelism of vectors. VI. Congruences and orthogonal ennuples. VII. Riemann symbols. Curvature of a Riemannian space. VIII. Hypersurfaces. IX. Hypersurfaces in euclidean space. Spaces of constant curvature. X. Subspaces of a Riemannian space. — The book will be welcomed by any mathematician who wants to get quickly some informations about the introduction to the metrical Tensor Calculus. *Hlavatý* (Praha).

Gołąb, St.: Über die Klassifikation der geometrischen Objekte. Math. Z. **44**, 104—114 (1938).

Ist dem Punkte P und jedem Bezugssystem B einer X_n ein System von Zahlen (Komponenten) zugeordnet, so spricht man von einem Objekt. Ein Objekt mit einer einzigen Komponente $\Omega = f(B)$ heißt geometrisch, wenn ein Funktional φ existiert derart, daß $\Omega_2 = \varphi(\Omega_1, T_{12})$ ist $(\Omega_2 = f(B_2); \Omega_1 = f(B_1); T_{12}$ ist die Transformation, welche von B_1 zum System B_2 führt). Verf. betrachtet in dieser Arbeit den Fall, daß φ eine Funktion von Ω und von der Jacobischen Determinante Δ ist. Die Bestimmung aller möglichen Objekte dieser Art führt zu einer Funktionalgleichung. Verf. erhält vier verschiedene Typen von Objekten: 1. Skalare, 2. monotone Funktionen von Weylschen Dichten, 3. Objekte mit der Transformation $\overset{(k')}{a} = \Delta\,|\Delta|^{-1}\overset{(k)}{a}$, 4. monotone Funktionen von gewöhnlichen Dichten. *J. Haantjes* (Delft).

Gołąb, St.: Über eine Art der Geometrie von Kawaguchi-Hokari. Ann. Soc. Polon. math. **16**, 25—30 (1938).

Mutô, Yosio, et Kentaro Yano: Sur la détermination d'une connexion conforme. Proc. Phys. Math. Soc. Jap., III. s. **20**, 267—279 (1938).

Jedem Punkte eines n-dimensionalen Raumes X_n sei ein projektiver Raum P_n (Koordinaten $X^\varkappa$) zugeordnet. Die Vektoren dieses Raumes werden definiert mittels der Gruppe $x^{0'} = x^0 + \log \varrho(x^1, \ldots, x^n)$, $x^{h'} = x^h(x^1, \ldots, x^n)$.

Überdies ist jedem Punkte ein $(n+1)$-dimensionaler Raum Q_{n+1} mit den Koordinaten $\xi^\lambda = \tau X^\lambda$, ξ^Δ zugeordnet. Es wird nun eine Übertragung definiert, welche eine Quadrik und eine Ebene in Q_{n+1} invariant läßt. *J. Haantjes* (Delft).

Yano, Kentaro: Sur l'espace projectif de M. D. van Dantzig. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1610—1612 (1938).

Verf. zeigt, daß ein allgemeiner projektiver Raum gleichwertig ist mit einer A_{n+1}, die eine infinitesimale Transformation $x^\varkappa \to x^\varkappa + \xi^\varkappa dt$ gestattet (vgl. dazu auch D. van Dantzig, dies. Zbl. **4**, 368). Es gibt Bezugssysteme, in bezug auf welche $\xi^\lambda \stackrel{*}{=} x^\lambda$ ist, und auch solche, in bezug auf welche $\xi^\lambda \stackrel{*}{=} \delta_1^\lambda$ ist. In beiden Formen ist die projektive Theorie aufgetreten. *J. Haantjes* (Delft).

Ohkubo, Takeo: Übertragungen in dem metrischen Raume der „K-spreads". J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, Math. **6**, 159—174 (1938).

Die Gleichung eines „K-spread" [Douglas, Ann. of Math. **29**, 143—168 (1927)]

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = H^i_{\alpha\beta}(x, p), \qquad \left(p^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right)$$

gibt Anlaß zu den Konnexionskoeffizienten

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{K(K+1)} \frac{\partial^2 H^i_{\alpha\beta}}{\partial p^j_\alpha \partial p^k_\beta}$$

einer affinen Konnexion, die in üblicher Weise zur affinen Übertragung der Größen führt: Aus $\delta v^i = dv^i + \Gamma^i_{jk} v^j dx^k$, $\delta p^i_\alpha = dp^i_\alpha + \Gamma^i_{jk} p^j_\alpha dx^k$

folgt dann die übliche Formel

$$\delta v^i = v^i_{/j} dx^j + v^{i\alpha}_{//j} \delta p^j_\alpha$$

mit

$$v^i_{/j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} v^k - \Gamma^l_{mj} p^m_\alpha \frac{\partial v^i}{\partial p^l_\alpha}, \qquad v^{i\alpha}_{//j} = \frac{\partial v^i}{\partial p^j_\alpha}.$$

(Somit ist diese Geometrie nur ein Spezialfall der allgemeinen Geometrie, in welcher p^j_α als ein gemischter Tensor angesehen wird.) Neben Γ^i_{jh} kann man aus der Gleichung des „K-spreads" auch einen quadratischen Tensor g_{ij} gewinnen und dementsprechend auch zur metrischen Übertragung nach der Formel

$$Dv^i = dv^i + (\Gamma^i_{jh} dx^h + \tfrac{1}{2} g^{ih} \delta g_{jh}) v^j$$

übergehen. Die mit Γ^i_{jh} und g_{ij} verbundenen üblichen Begriffe werden auch untersucht und zum Schluß eine andere metrische Übertragung nach dem Vorbilde Cartan's konstruiert. *Hlavatý* (Praha).

Allgemeine metrische Geometrie, Integralgeometrie, Konvexes und Verwandtes:

Pauc, Christian: Unification des processus générateurs des divers contingents et paratingents. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1242—1244 (1938).

Définition des divers contingents et paratingents au moyen de la fonction d'accumulatif correspondant à un opérateur continu θ (cf. ce Zbl. **16**, 137 et **14**, 275). L'auteur énonce en fin de note le théorème suivant: Un continu dont le contingent en chacun de ses points est non connexe, est une courbe régulière au sens de Menger. *E. Blanc* (Toulon).

Szőkefalvi Nagy, Gyula v.: Über ebene Vielecke, insbesondere über ebene einfache Vielecke. Mat. természett. Értes. **57**, Tl 1, 51—76 u. deutsch. Zusammenfassung 77—78 (1938) [Ungarisch].

Es kann nur über den deutschen Auszug berichtet werden. Es seien P_ν, $\nu=1,\ldots,n$, mit $n \geqq 3$, fest vorgegebene Punkte in der euklidischen Ebene. Sie bestimmen ein n-seitiges Grundvieleck V'_n. Die P_ν bzw. die Verbindungsstrecken s_ν von P_ν mit $P_{\nu+1}$ (wobei $P_{n+1} = P_1$) bzw. die Trägergeraden g_ν von s_ν heißen Ecken bzw. Seiten bzw. Grundgeraden von V'_n. Keine Ecke soll mit einer anderen Ecke oder Seite inzidieren und keine 3 Seiten sollen einen Punkt gemeinsam haben. Ist der Ebene ein Drehsinn aufgeprägt, so werde jeder Ecke P_ν derjenige Winkelraum w_ν zugeordnet, welcher der kleinsten positiven Drehung um P_ν entspricht, durch welche die (nichtorientierte) Grundgerade $g_{\nu-1}$ in g_ν übergeführt wird ($g_0 = g_n$, $s_0 = s_n$). V'_n zusammen mit den w_ν bestimmt ein n-eckiges und n-seitiges Vieleck V_n^+. Jede Gerade, welche in w_ν oder auf dem Rande von w_ν liegt, heißt Tangente von V_n^+ mit dem Berührungselement P_ν bzw. $s_{\nu+1}$ bzw. s_ν. Ferner heißt P_ν Rückkehrpunkt oder gewöhnliche Ecke von V_n^+, je nachdem $s_{\nu-1} + s_\nu$ von den Tangenten mit dem Berührelement P_ν geschnitten wird oder nicht. Jetzt erklärt man in bekannter Weise Klasse und Klassenindex von V_n^+. Legt man den umgekehrten Drehsinn zugrunde, so erhält man zum gleichen Grundvieleck ein zweites Vieleck V_n^-. Sind nun $k^\pm$, $j^\pm$, $r^\pm$ Klasse, Klassenindex und Anzahl der Rückkehrpunkte von V_n^+ bzw. von V_n^-, so gilt: $k^+ + j^- = k^- + j^+ = r^+ + r^- = n$. Besitzt V_n^+ keinen Doppelpunkt, so ist es vom Maximalklassenindex: $k = j + 2$. Ferner besteht dann zwischen der Anzahl t der Doppeltangenten und dem Geschlechte p von V_n^+ die Beziehung: $t = \binom{n-1}{2} - p$, wo $p = 1 + \frac{1}{2}(r - n)$. Übrigens ist $p = 0$ oder $= 1$, wenn das Gebiet, von dessen Punkten aus die minimale Anzahl Tangenten an V_n^+ geht, vom Zusammenhange 1 oder 2 ist. Die Sätze gelten auch für Vielseite in der projektiven Ebene (zur Definition hierbei vgl. das nachsteh. Ref.).

Haupt (Erlangen).

Sz. Nagy, Béla v.: Über projektive Vielecke und Vielseite. Mat. természett. Értes. **57**, Tl 1, 105—119 u. deutsch. Zusammenfassung 120 (1938) [Ungarisch].

Es kann nur über den deutschen Auszug berichtet werden. In der projektiven Ebene sei ein geordnetes n-Tupel von Punkten P_ν, $\nu = 1, \ldots, n$; $P_{n+1} = P_1$, fest vorgegeben. Die Verbindungsgeraden g_ν von P_ν mit $P_{\nu+1}$ heißen Grundgeraden; keine 3 Grundgeraden sollen sich in einem Punkte treffen. Ordnet man jedem P_ν einen der beiden durch $g_{\nu-1}$ und g_ν gebildeten Winkelräume w_ν zu, so bestimmen diese w_ν ein projektives n-Eck E_n; solcher E_n gibt es also zu festen P_ν im ganzen 2^n. Liegt der Punkt P auf keiner der Grundgeraden und liegt die Verbindungsgerade p_ν von P mit P_ν nicht im w_ν, so heiße p_ν Tangente an E_n in P_ν. Damit sind jetzt Klasse k, Klassenindex j und Klassendefekt $d = k - j$ von E_n erklärbar. Die Untersuchung gilt vor allem der Frage nach den Grenzen, zwischen denen die Klassendefekte der sämtlichen 2^n projektiven n-Ecke (welche zu fest gegebenem n-Tupel $P_1, \ldots, P_n$ gehören) variieren können. Ferner werden duale Sätze für die dualen Gebilde, d. h. für projektive n-Seite, ausgesprochen. *Haupt* (Erlangen).

Pimiä, Lauri: Über Vielflache dritter Ordnung. Ann. Acad. Sci. Fennicae A **49**, Nr 2, 1—167 (1938).

Behandelt werden zunächst (1. Kap.) Vielseite V im projektiven R_2, d. h. ebene geschlossene Streckenzüge (welche eindeutige stetige Kreisbilder sind). Die einzelne Strecke heißt Seite von V, der gemeinsame Endpunkt zweier im Streckenzuge unmittelbar aufeinanderfolgender Seiten heißt Ecke von V. Liegen keine zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Seiten von V in der gleichen Geraden, so heißt V regulär. Ist im R_2 eine Gerade g gegeben, so kann man V derart als Summe von Streckenzügen s_ν darstellen, daß die Endpunkte der s_ν nicht auf g liegen und daß jeder s_ν mit g genau einen Punkt P_ν oder genau eine Strecke, sog. verlängerten Punkt P_ν,

gemeinsam hat. Ist diejenige Strecke, durch welche s_ν zu einem paaren Vielseit ergänzt wird, nicht fremd zu g, so heiße g Schnittgerade von V in P_ν. Eine Seite q von V heiße Inflexionsseite, wenn ihre Trägergerade Schnittgerade von V in q ist. Es wird dann vor allem der schon von Hjelmslev (Åttonde skandin. matematikerkongr. Stockholm **1934**, 3—12; dies. Zbl. **12**, 33) ausgesprochene Satz bewiesen: Ein einfaches reguläres Vielseit 3. Ordnung besitzt 3 Inflexionsseiten. Unter der Ordnung eines Vielseits V wird dabei die Maximalzahl der Punkte verstanden, in welchen V von einer Geraden geschnitten wird (die verlängerten Punkte sind dabei je für einen Schnittpunkt gezählt). — Im 2. Kap. wird dann eine Theorie der Vielflache 3. Ordnung im projektiven R_3 gegeben, von der hier aus Raummangel nur einiges besprochen werden kann. Zunächst einige Definitionen: Ein einfaches paares ebenes Vielseit V zerlegt den R_2 in zwei Gebiete; von diesen heißt dasjenige das Äußere A bzw. das Innere I von V, in welchem unpaare Vielseite konstruiert bzw. nicht konstruiert werden können. Als Fläche 1. Art bzw. 2. Art erklären wir jede Punktmenge $V + I$ bzw. $V + A$, wenn V (einfach, paar und) regulär ist. Die Seiten bzw. Ecken von V heißen Seiten bzw. Ecken der Fläche. Als Vielflach im R_3 wird erklärt jede Summe von endlich vielen Flächen so beschaffen, daß 1. jeder Seite s irgendeiner der Flächen F genau eine andere Fläche F' zugeordnet ist, für welche s ebenfalls Seite ist; F und F' heißen benachbart (längs s); 2. jeder Ecke E einer F ein Zyklus von Flächen zugeordnet ist, in welchem zwei aufeinanderfolgende Flächen benachbart sind längs einer Seite, die E als Endpunkt besitzt; 3. je beliebige zwei der Flächen durch eine Folge von Flächen verbindbar sind, in welcher je zwei aufeinanderfolgende benachbart sind. Ein Vielflach heißt regulär, wenn je zwei seiner Flächen, soweit sie in der gleichen Ebene liegen, höchstens Eckpunkte gemeinsam haben; es heißt von 1. bzw. 2. Art, je nachdem das Vielflach nur Flächen 1. Art oder mindestens eine Fläche 2. Art besitzt. Die beiden Hauptsätze lauten nun folgendermaßen (unter der Ordnung eines Vielflaches das Maximum der Anzahl „gewöhnlicher“, d. h. im Innern einer Seite gelegener und nicht verlängerter, Schnittpunkte verstanden, welche eine Gerade mit dem Vielflach gemeinsam hat): I. Ein reguläres Vielflach 3. Ordnung 1. Art ist einfach. Es enthält genau 3 Geraden, welche in einer Ebene liegen und sich paarweise in den drei Sattelpunkten des Vielflaches schneiden. Diese drei Geraden (sind sog. Inflexionsgeraden und) zerlegen das Vielflach in vier konvexe Bruchflächen. Unter einer Bruchfläche wird eine Summe von endlich vielen Flächen verstanden derart, daß 1. zu jeder Fläche mindestens eine andere (längs einer Seite) benachbart ist; 2. je zwei der Flächen durch eine Folge von Flächen verbindbar sind, in welcher je zwei aufeinanderfolgende benachbart sind. — II. Ein reguläres Vielflach 3. Ordnung 2. Art besitzt a) entweder eine oder b) drei Flächen 2. Art. Zu a): Ist die Fläche 2. Art F eine sog. Konvex- bzw. Nichtkonvexfläche des Vielflachs, so besteht letzteres außer aus F aus einer konvexen Bruchfläche bzw. aus zwei konvexen Bruchflächen und einer eventuellen, in der Ebene von F gelegenen Fläche 1. Art. — Zu b): Das Vielflach besteht aus vier (oder einer) konvexen Bruchflächen, deren Berandungen paare Dreiseite sind, nebst drei Flächen 2. Art, welche Bestandteile der für den Fall b bereits angeführten drei Flächen 2. Art und deren Berandungen Vierseite (oder Dreiseite) zweiter Ordnung sind. — Durch Konstruktion von Beispielen wird die Existenz sämtlicher in den Sätzen I und II aufgeführter Typen von regulären Vielflachen 3. Ordnung sichergestellt. Wegen weiterer zahlreicher Einzelheiten und Ergebnisse muß auf die umfangreiche Arbeit selbst verwiesen werden. *Haupt* (Erlangen).

Inzinger, Rudolf: Über eine Eigenschaft der Scheitelschmiegkreise von Eilinien. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **48**, Abt. 1, 49—55 (1938).

Die Eigenschaft betrifft Extreme und bezieht sich auf das System $\mathfrak{K}$ jener orientierten Kreise der Ebene, deren mit Vorzeichen zu nehmende Radien kleiner als der minimale Krümmungsradius (>0) der konvexen Kurve C sind. Der Verf. teilt $\mathfrak{K}$ in die Kreise „im Inneren“ und „im Äußeren“, je nachdem ob sie keine oder zwei or.

Stützgeraden mit C gemein haben; diese beiden Fälle und die Berührungskreise erschöpfen alle Möglichkeiten. Ist nun K ein beliebig fixierter Kreis im Inneren oder ein Berührungskreis aus $\mathfrak{K}$, so wird an Hand der (hinreichend regulär vorausgesetzten) Stützfunktion von C bewiesen: Das Quadrat der Tangentialentfernung zwischen K und den Schmiegkreisen von C erreicht Extreme für die Scheitelschmiegkreise und nur für sie. Wenn K im Äußeren liegt, kommen i. allg. zwei Extreme hinzu. — Die Ergebnisse werden schließlich mittels zyklographischer Abbildung auf einfache räumliche Figuren zurückgeführt. Hervorzuheben ist der Hilfssatz, daß die Kreise im Inneren von C die zyklographischen Bilder der Punkte einer konvexen Menge sind.

Anton E. Mayer (Wien).

Vincze, Stephan: Über die Schwerpunkte der konvexen Kurven bei speziellen Belegungen. Acta Litt. Sci. Szeged **9**, 52—59 (1938).

Ist die Dichte der Massenbelegung auf der konvexen Kurve C proportional zu der von einem beliebigen Punkt P gemessenen Entfernung r bzw. zu r^p $(p > 0)$, so sei $S(P, p)$ der Schwerpunkt. Durchläuft P die ganze Ebene, dann durchläuft $S(P, p)$ eine Punktmenge, die das Innere von C nicht ausfüllt [z. B. wenn $p = 2$ und C ein Kreis ist, die Fläche eines Kreises mit halbem Radius (Anm. d. Ref.)]. Doch kann jeder Punkt innerhalb C bei geeigneter Wahl von P und p als Schwerpunkt $S(P, p)$ dargestellt werden; insbesondere ist $S(\infty, p)$ für jedes p der Umfangsschwerpunkt von C. Die Abbildung $P \to S(P, p)$ besitzt genau einen Fixpunkt $F(p)$, der für $p \to \infty$ gegen die Mitte des kleinsten C umschriebenen Kreises konvergiert. Die Existenz eines einzigen Fixpunktes wird auch unter der allgemeineren Voraussetzung bewiesen, daß an Stelle der Potenz r^p eine stetige Funktion $f(r)$ tritt, falls $r f(r)$ stetig und positiv ist und eine ebensolche Ableitung hat. — Andeutungen über „zentrale" Belegung der von C berandeten Fläche und über mehrdimensionale Verallgemeinerungen.

Anton E. Mayer (Wien).

Görtler, H.: Erzeugung stützbarer Bereiche. II. Deutsche Math. **3**, 189—200 (1938).

Fortsetzung der Untersuchungen über Basen von linearen Mengen stützbarer Bereiche (vgl. dies. Zbl. **17**, 189). Hier werden mit jedem Bereich zugleich alle dazu kongruenten betrachtet und dementsprechend auch kontinuierliche Linearkombinationen zugelassen (mit Belegungsfunktionen, die dieselben Regularitätsbedingungen erfüllen wie die Stützfunktionen). Unter einer Gesamtheit $\mathfrak{G}$ wird eine Menge von Stützbereichen verstanden, die mit einem Bereich stets alle dazu kongruenten und mit irgendwelchen Bereichen stets auch deren diskrete und kontinuierliche Linearkombinationen enthält. Jede Gesamtheit $\mathfrak{G}$ läßt sich mit Hilfe der Fourierkoeffizienten der Stützfunktionen einfach charakterisieren, nämlich als die Gesamtheit der Stützbereiche, deren Fourierkoeffizienten von gewissen Ordnungen verschwinden, während die übrigen beliebig sind. Zu jeder Gesamtheit $\mathfrak{G}$ gibt es wenigstens einen „Zeuger" derart, daß jeder Bereich von $\mathfrak{G}$ aus ihm und seinen kongruenten linear kombiniert werden kann. Die Gesamtheiten $\mathfrak{G}$ hängen eng mit den Favardschen Klassen konvexer Bereiche mit gewissen bewegungsinvarianten gemischten Inhalten zusammen. — Durch Faltung

$$h_1 * h_2 = \int_0^{2\pi} h_1(\varphi - \alpha)\, h_2(\alpha)\, d\alpha$$

zweier Stützbereiche $h_1(\varphi)$ und $h_2(\varphi)$ entsteht wieder ein Stützbereich $h(\varphi)$, der Faltungsbereich von h_1 und h_2 (dessen Gestalt bei Bewegungen von h_1 und h_2 erhalten bleibt und der offenbar konvex ist, wenn h_1 und h_2 es sind). Mit der Faltung als Multiplikation und der gewöhnlichen Addition lassen sich Stützbereichringe definieren. Auch diese erweisen sich als im wesentlichen identisch mit den Gesamtheiten $\mathfrak{G}$. Das Eigenwertproblem für die homogene Faltungsgleichung mit dem Kern $h_0(\varphi - \alpha)$ hat genau die in der Fourierreihe von h_0 auftretenden Elemente der Hypozykloidenbasis (vgl. dies. Zbl. **17**, 189) zu Eigenfunktionen. Es werden ferner einige Ungleichungen für

die Invarianten von Faltungsbereichen hergeleitet. — Schließlich werden einige der Begriffsbildungen auf den Raum übertragen. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Mathematische Physik.

Optik:

Record, Frederick: Thick lenses and combinations of thin lenses. Philos. Mag., VII. s. **25**, 801—807 (1938).

Einfache Herleitung der Brennweitenformel eines aus dünnen Linsen zusammengesetzten Systems bzw. einer dicken Einzellinse, ausgehend von einigen einfachen Beziehungen der Brechung an einer einzelnen Fläche, die zwei verschiedene Medien trennt. Sind f, f' objekt- und bildseitige Brennweite, z, z' zueinander optisch konjugierte Abstände vom objekt- bzw. bildseitigen Brennpunkt und m das zugehörige Vergrößerungsverhältnis, so gelten die Beziehungen

$$m = -f/z = -z'/f' \quad \text{und} \quad zz' = ff' \quad \text{und} \quad f/f' = -n/n'$$

wenn n und n' die Brechungswerte des objekt- bzw. bildseitigen Mediums bezeichnen. Ist r der Krümmungsradius der Fläche, so ist $r = f + f'$. Ist bei einem System aus zwei dünnen Linsen oder bei einer dicken Linse d der Abstand der Linsen bzw. Flächen, k der Abstand der zugekehrten Brennpunkte der Linsen bzw. Flächen, so gelten die Beziehungen

$$f = \frac{f_1 f_2}{k}; \qquad f' = -\frac{f_1 f_2'}{k}.$$

Es werden weiter die Formeln für die Hauptpunktsabstände des zusammengesetzten Systems sowie die Formel

$$\frac{n_2'}{f'} = D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n} D_1 D_2$$

mit

$$D_i = \frac{n_i'}{f_i'} \quad \text{und} \quad n_1' = n_2 = n$$

abgeleitet. Der Verf. weist darauf hin, daß jedes optische System

mit $f/f' = -1$ durch eine Äquivalentlinse,

mit $f/f' \neq -1$ durch eine Äquivalentfläche vom Krümmungsradius $r = f + f'$

ersetzt gedacht werden kann, wobei aber sowohl der Äquivalentlinse als auch der Äquivalentfläche zwei verschiedene Lagen für den Objektraum und den Bildraum zuzuweisen sind. *Picht* (Babelsberg).

Weigle, J., et J. Patry: Théorie de la propagation de la lumière dans un milieu atomiquement stratifié. II. Helv. phys. Acta **11**, 181—188 (1938).

Ableitung der Formeln für die Lichtausbreitung in einem Medium, in dem Atome anisotrop verteilt liegen, die selbst optisch anisotrop sind (vgl. dies. Zbl. **18**, 182). *Bechert* (Gießen).

Patry, J. F. C.: Sur la théorie du réseau optique. Helv. phys. Acta **11**, 189—206 (1938).

Theorie der Interferenz an einem Gitter, das aus einer planparallelen Platte besteht aus einem Material, das senkrecht zur Dicke der Platte eine periodisch veränderliche Dielektrizitätskonstante hat. *Bechert* (Gießen).

Quantentheorie:

Hermann, H.: Quantenmagnetische Berechnung des Elektronhalbmessers. Z. Physik **108**, 218—222 (1938).

Wenn das magnetische Moment des Elektrons als Dipol von Diracschen Magnetpolen [Proc. Roy. Soc. (A) **133**, 60 (1931)] aufgefaßt wird, so ergibt sich eine Dipollänge von der Größenordnung des klassischen Elektronenradius. *O. Klein.*

Rozhanskij, I., and J. Frenkel: The quantum theory of „spiral“ orbits of an electron in a Coulomb field. Ž. eksper. teoret. Fis. 8, 127—138 (1938) [Russisch].

Die Diracsche Wellengleichung für ein Elektron im Coulombfeld wird für den Fall $Z = 137$ gelöst. Es ergibt sich dann ein kontinuierliches Spektrum, obwohl die Eigenfunktionen noch quadratisch integrierbar sind. *R. Peierls* (Birmingham).

Proca, Al.: Théorie non relativiste des particules à spin entier. J. Physique Radium, VII. s. **9**, 61—66 (1938).

Durch Vernachlässigung der Relativitätseffekte in den vektoriellen vom Verf. früher (dies. Zbl. **15**, 44) gegebenen Wellengleichungen wird ein System von drei Schrödingergleichungen abgeleitet, die ein Teilchen mit ganzzahligem Spin und normalem Verhältnis zwischen magnetischem Moment und Spinimpulsmoment beschreiben, welche möglicherweise das Verhalten von langsamen, schweren Elektronen darstellen.

O. Klein (Stockholm).

Fröhlich, H., W. Heitler and N. Kemmer: On the nuclear forces and the magnetic moments of the neutron and the proton. Proc. roy. Soc., Lond. A **166**, 154—177 (1938).

Systematische Durchführung der Theorie der magnetischen Momente schwerer Teilchen (Proton, Neutron) und der zwischen ihnen bestehenden Wechselwirkungskräfte auf der Grundlage der Theorie von Yukawa und Proca. Analoge Divergenzschwierigkeiten wie in der Strahlungstheorie bleiben vorläufig unlösbar (Selbstenergie!). Im übrigen ergibt die Theorie: Die Masse des „schweren Elektrons“ ist sowohl aus der Reichweite der Kernkräfte als auch aus den magnetischen Momenten bestimmbar; übereinstimmend erhält man ungefähr 180 Elektronenmassen. Die Proton-Proton-Kraft (oder Neutron-Neutron-Kraft) wird jedoch abstoßend statt anziehend; die empirischen Befunde scheinen deshalb für die Notwendigkeit zu sprechen, neben dem schweren Elektron noch ein neutrales Teilchen ähnlicher Masse und analoger Eigenschaften anzunehmen. *P. Jordan* (Rostock).

Chakravorti, S. K.: Das Eigenwertproblem eines zweiatomigen Moleküls und die Berechnung der Dissoziationsenergie. Z. Physik **109**, 25—38 (1938).

Auf wellenmechanischer Grundlage wird bei einem speziellen Potentialansatz die Schwingungs-, Rotations- und Dissoziationsenergie zweiatomiger Moleküle berechnet und die erhaltenen Formeln auf die Moleküle BeH, CdH, C_2 und N_2 angewandt. Als potentielle Energie der beiden Atome wird der von Kratzer herrührende, bekannte Ausdruck

$$U = A - B\left\{\frac{1}{1+\xi} - \frac{1}{2(1+\xi)^2} + b\xi^2 + c\xi^3 + d\xi^4 + \cdots\right\}, \qquad \xi = \frac{r-r_e}{r_e},$$

benutzt, wobei in der radialen Wellengleichung das von der Rotationsenergie stammende Glied, $-\frac{m(m+1)}{(1+\xi)^2}$, noch hinzukommt. Die Behandlung der Gleichung ist wesentlich dadurch charakterisiert, daß die negativen Potenzen von $(1+\xi)$ in positive Potenzreihen von ξ entwickelt werden (gültig nur für $\xi < 1, r < 2r_e$). Formell kann dann die Wellengleichung mit Hilfe von Hermiteschen Orthogonalfunktionen gelöst werden, wobei zwar wegen der höheren Potenzen $c\xi^3$, $d\xi^4$ usw. von ξ in der potentiellen Energie das Verfahren nicht auf konvergierende, exakte Eigenwerte und Eigenfunktionen, sondern nur auf gewisse Näherungslösungen führt. Wird die Rotationsenergie gleich Null gesetzt, erhält man für die reine Schwingungsenergie den Term

$$G(j) = -c + \omega'_e(j+\tfrac{1}{2}) - x'_e\omega'_e(j+\tfrac{1}{2})^2 + y'_e\omega'_e(j+\tfrac{1}{2})^3,$$

wobei ω'_e, $x'_e\omega'_e$ und $y'_e\omega'_e$ Funktionen der Potentialkoeffizienten sind. Mit $d = e = \cdots = 0$ werden nun B, b und c gemäß den ausgerechneten Formeln den spektroskopisch gemessenen Werten von ω'_e, $x'_e\omega'_e$ und α angepaßt und $y'_e\omega'_e$ aus B, b und c berechnet. Zum Schluß wird die Dissoziationsenergie gemäß der Formel $D = G_{\max}(j) - G(0)$, nicht aus dem gewonnenen Ausdruck der potentiellen Energie, berechnet. Die so erhaltenen Werte der Dissoziationsenergie sind für die vier obenerwähnten Moleküle bedeutend kleiner als diejenigen, die die Formel von Morse liefert, und — mit Ausnahme von CdH — auch kleiner als die experimentell gefundenen. *Egil A. Hylleraas.*

Klein, O.: Quelques remarques sur le traitement approximatif du problème des électrons dans un réseau cristallin par la mécanique quantique. J. Physique Radium, VII. s. **9**, 1—12 (1938).

Es werden die folgenden Fragen in bezug auf die Behandlung von Elektronen

in Kristallgittern untersucht: 1. Anwendung der Wentzel-Kramers-Brillouin-Methode für ein periodisches Feld. 2. Angenäherte Separation eines dreidimensionalen Problems in Funktionen, die nur je von einer Koordinate abhängen. 3. Anwendung der Hartree-Fock-Methode. 4. Struktur der Diracschen Dichtematrix für Kristalleigenfunktionen vom Blochschen Typus und ihre Anwendung für eine angenäherte Behandlung der Wechselwirkung der Elektronen. *Nordheim* (Durham, North Carolina).

Relativitätstheorie.

Milne, E. A., and G. J. Whitrow: On the meaning of uniform time, and the kinematic equivalence of the extra-galactic nebulae. Z. Astrophys. **15**, 263—298 (1938).

The authors give a comprehensive discussion of how, starting from the existence of a temporal sequence of events at any observer, the concept of uniform time may be isolated. The main problem is analysed into a logical sequence of "problems of time-keeping", which are then tackled one by one, technical terms such as "velocity", "distance", etc., being defined as they arise. The first problem solved is that of showing how, given an arbitrarily graduated clock, a congruent clock may be defined at a distance for any relative motion. A set of observers possessing clocks all congruent to one another is called an "equivalence", and it is proved that an equivalence of any type may be converted into any other by an appropriate regraduation of clocks. Amongst all possible regraduations of the clocks of an equivalence two stand out with special properties, namely the one which reduces the equivalence to a uniform-relative-motion equivalence (regraduation to t), and the one which reduces it to a relatively-stationary equivalence (regraduation to τ); see Milne, this Zbl. **16**, 185. A "substratum" is defined to be an equivalence in which attention is paid to the distribution of the particles. By deriving the laws of dynamics holding good in the presence of a uniform-motion substratum, and then regraduating to give a relatively-stationary substratum, the authors obtain results which lead them to conclude that the uniform time of classical mechanics is to be identified with τ-time, and the uniform time of optics with t-time. The reason for this, they maintain, is that the universe is to be identified with a substratum. They further argue that Hubble's two alternative accounts of the universe, with and without recession (see Hubble, The Observational Approach to Cosmology), correspond to the two different descriptions of the same phenomenon according as the t- or τ-scale is used. "Proper time" has no absolute meaning, but only a meaning in connection with the adoption of dynamical laws in a selected form. In the course of the paper the authors rebut the criticism often made of Milne's cosmology that it deals only with a special case. *H. S. Ruse* (Southampton).

Milne, E. A., and G. J. Whitrow: On a linear equivalence discussed by L. Page. Z. Astrophys. **15**, 342—353 (1938).

The authors examine the equivalence of accelerated particle-observers discussed by Leigh Page [this Zbl. **13**, 234; see also Physic. Rev. **49**, 466 (1936); also Engstrøm-Zorn and Robertson, this Zbl. **14**, 86], and show that his notion of equivalence leads to a self-contradiction when different observers' clocks are compared. They also prove that the synchronisation of clock-zeros is an essential element in the notion of equivalence. They conclude with a brief discussion of cosmological applications, and in particular show that the clocks kept by two equivalent observers necessarily agree when they part company and also at any subsequent epoch of coincidence, should they meet again. This disposes of the clock-paradox of special relativity. *H. S. Ruse* (Southampton).

Chwistek, Leon: Quelques remarques sur les lois fondamentales de la propagation de la lumière. Arch. Towarz. nauk. Lwow. **9**, H. 4, 1—5 (1938) [Polnisch].

Je montre que les temps t, t' intervenant dans la transformation Lorentz-Einstein peuvent être conçus comme des temps apparents qui nous sont imposés par

les propriétés de l'onde lumineuse. Cette interprétation n'implique aucun changement du système de la physique Einsteinienne, mais elle pourrait être intéressante au point de vue de la théorie de connaissance. En effet, elle nous permet de revenir à l'idée du temps indépendant de la lumière et à l'idée du corps solide classique. Toutefois nous sommes obligés à renoncer à l'idée classique de l'onde de la lumière, en y substituant l'idée relativiste d'une onde dépendant de l'observateur.

Autoreferat.

Hermann, H.: Eine Einschränkung eines Satzes der relativistischen Stoßmechanik. Z. Physik **108**, 223—224 (1938).

Die Note bringt einen Einwand gegen die Allgemeinheit des Satzes, daß ein infinitesimales Impulsintervall durch die entsprechende Energie dividiert Lorentz-invariant ist. Im Satz bedeutet das Impulsintervall ein Volumenelement im Impulsraum, während es in der vorliegenden Note ein lineares Impulsintervall bedeutet.

O. Klein (Stockholm).

Roubaud-Valette, Jean: Sur la nature du champ électromagnétique en relativité restreinte. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1457—1460 (1938).

Roubaud-Valette, Jean: La masse et la gravitation. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1556—1558 (1938).

Astrophysik.

Sommerfeld, A.: Über einen Zusammenhang zwischen der Theorie der Planeten und der weißen Zwerge. Nuovo Cimento, N. s. **15**, 14—22 (1938).

The author discusses the recent theoretical work of Kothari on the internal constitution of the planets and the white dwarfs (see this Zbl. **15**, 231). In the introduction to the present paper he briefly summarizes the basic assumptions of Kothari's theory, and in the next section he gives a detailed discussion of the mass-radius relation of that theory. A very clear theoretical derivation of this relation is then given in section 2. The concluding section is devoted to a critical study of the various simplifying assumptions underlying the work of Kothari; for instance the assumption $T = 0$, and the assumption of constant density of matter in the interior of the planets and the white dwarfs; further the neglect of all other forces than those of a Coulombian and Newtonian nature, and the assumption of constant electron density within the atomic volume. *Steensholt* (Oslo).

Schwarzschild, M.: Zur Pulsationstheorie. Z. Astrophys. **15**, 14—31 (1938).

Es wird das Problem angegriffen, eine Pulsationstheorie der Cepheiden zu entwickeln, die im Gegensatz zur Eddingtonschen Pulsationstheorie in bezug auf den Phasenunterschied zwischen Ausstrahlung und radialer Amplitude mit der Erfahrung übereinstimmt. Die Untersuchung fällt in drei Teile. Zunächst wird gezeigt, daß diejenige Lösung der Pulsationsgleichung, die den aus dem Ansatz $T \to 0$ für die Oberfläche folgenden Randbedingungen genügt, mit den Beobachtungen im Widerspruch steht, auch wenn die besonderen Verhältnisse in den äußeren Schichten berücksichtigt werden. Sodann wird versucht, eine brauchbare Lösung zu erhalten, indem außerhalb der Atmosphäre die soeben behandelte Lösung angesetzt wird, in der Atmosphäre aber eine Lösung mit einer von der Zentrumsentfernung abhängigen Phase (laufende Welle). Es wird durch ausführliche Berechnungen gezeigt, daß dieser Versuch undurchführbar ist. Schließlich werden die aus dem Ansatz $T \to 0$ für die Oberfläche folgenden Randbedingungen aufgegeben. Sodann kann eine Lösung erzwungen werden, die im größten Teil des Innern praktisch konstante Phasen zeigt (stehende Wellen), in den äußeren Schichten sich aber so verhält, daß Übereinstimmung mit den Beobachtungen vorhanden ist. Eine solche Lösung wird numerisch berechnet. Es wird ein Programm aufgestellt für die weiteren Untersuchungen derartiger Lösungen.

Bengt Strömgren (Kopenhagen).

Keenan, Philip C.: The effect of an adiabatic layer upon solar limb darkening. Astrophys. J. 87, 45—52 (1938).

Verf. untersucht die Ausstrahlung einer Modellatmosphäre, die durch die folgenden Annahmen charakterisiert ist: Die Atmosphäre besteht aus einer oberen Schicht im Strahlungsgleichgewicht und einer unteren Schicht im konvektiven Gleichgewicht. Der Absorptionskoeffizient ist proportional p^n, wo p der Druck und n eine willkürliche Konstante ist. Das Verhältnis der spezifischen Wärmen ist im konvektiven Gebiet konstant gleich γ. Gemäß der Schwarzschildschen Stabilitätsbedingung wird in Übereinstimmung mit Unsöld die optische Tiefe τ_1 der Trennungsschicht, wo die Konvektion einsetzt, als Funktion von γ und n abgeleitet. Der Temperaturverlauf durch die beiden Schichten hindurch kann sodann abgeleitet werden, indem die Grenzbedingungen für Temperatur und Strahlungsstrom an der Trennungsfläche berücksichtigt werden. Schließlich ergibt sich die Ausstrahlung als Funktion des Austrittswinkels, das ist die Kurve der Randverdunklung. Die Berechnung wird für τ_1 gleich 1, 0,67 bzw. 0,28 numerisch durchgeführt. Nur für relativ kleine Werte von τ_1, die physikalisch unwahrscheinlichen Werten von γ entsprechen, ist die Abweichung vom Fall des reinen Strahlungsgleichgewichts merklich. Das Ergebnis wird im Zusammenhang mit den Untersuchungen von Plaskett über die Randverdunklung diskutiert. *Bengt Strömgren* (Kopenhagen).

McVittie, G. C.: The distances of the extra-galactic nebulae. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 98, 384—397 (1938).

Es wird gezeigt: 1. daß Hubble bei der Gegenüberstellung von kosmologischer Theorie und Beobachtung außergalaktischer Nebel implizite verschiedene Entfernungsdefinitionen benutzt; 2. daß Hubble eine bestimmte dieser Definitionen mit einer gewissen radialen Koordinate der Theorie streng identifiziert, obwohl beide bei starker Raumkrümmung nur näherungsweise übereinstimmen; 3. daß Hubbles Resultat einer starken positiven Raumkrümmung sehr empfindlich ist gegen die sehr unsichere bolometrische Korrektion der scheinbaren Nebelgrößen. — Der Verf. nimmt, im Gegensatz zu Hubble, die Materiedichte des Universums als unabhängiges empirisches Datum, um über die Feldgleichungen der Gravitation die Raumkrümmung zu bestimmen. Er findet sie negativ. *Heckmann* (Göttingen).

Mineur, Henri: Sur le potentiel de gravitation de la galaxie. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1618—1620 (1938).

Verf. diskutiert die Vorzeichen einiger Koeffizienten, die bei der Entwicklung des Gravitationspotentials der Milchstraße in der Umgebung der Sonne auftreten. Insbesondere weist er darauf hin, daß bei nach außen abnehmender Dichte grundsätzlich der Koeffizient $\alpha = \frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial R} - \frac{\partial^2 U}{\partial R^2}$ (U = Potential, R = Abstand vom gal. Zentrum) sowohl positiv wie negativ ausfallen kann. Empirische Werte für einige Koeffizienten werden ermittelt. *Straßl* (Göttingen).

Schoenberg, E.: Über den Brechungsexponenten des interstellaren Raumes. Z. Physik **109**, 127—138 (1938).

Es wird eine Formel entwickelt für den Brechungsexponenten einer Wolke, die aus sehr kleinen absorbierenden und streuenden festen Partikeln besteht. Die Formel zeigt, daß der Brechungsexponent einer Gasmasse sich bei Kondensation derselben zu festen Partikeln — innerhalb zulässiger Näherungen — nicht ändert, obwohl Absorptions- und Reflexionsvermögen starke Veränderungen erfahren. *Straßl.*

● **Pahlen, Emanuel: Lehrbuch der Stellarstatistik. Unter Mitwirkung v. Friedrich Condolatsch.** Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1937. XV, 934 S. u. 135 Abb. RM. 96.—.
